CURSO INTERNACIONAL: CONSTRUCCIÓN DE ESCENARIOS ECONÓMICOS Y ECONOMETRÍA AVANZADA

PRUEBAS DE DIAGNÓSTICO

Instructor: Horacio Catalán Alonso

Selección del modelo econométrico

$$Y = X\beta + U$$

El modelo de regresión múltiple asume diverso supuestos estadísticos que determinan la validez de los resultados econométricos así como la inferencia estadística

Asume principalmente

$$E(UX) = 0 \quad X \quad \text{regresores} \quad \text{fijos}$$

$$E(U/X) = 0 \quad X \quad \text{regresores aleatorios}$$

$$\text{con muestras independientes}$$

1) El término de error tiene media cero

$E(u_i | \mathbf{X}) = 0$ para i = 1,2,…,N

2) El término de error presneta varianza constante

$E(\mathbf{uu}' | \mathbf{X}) = \sigma^2 \mathbf{I}_{N \times N}$

3) No existe autocorrelación

$E(u_i u_j | \mathbf{X}) = 0$ para todo i ≠ j

4) El término de error se distribuye como una normal

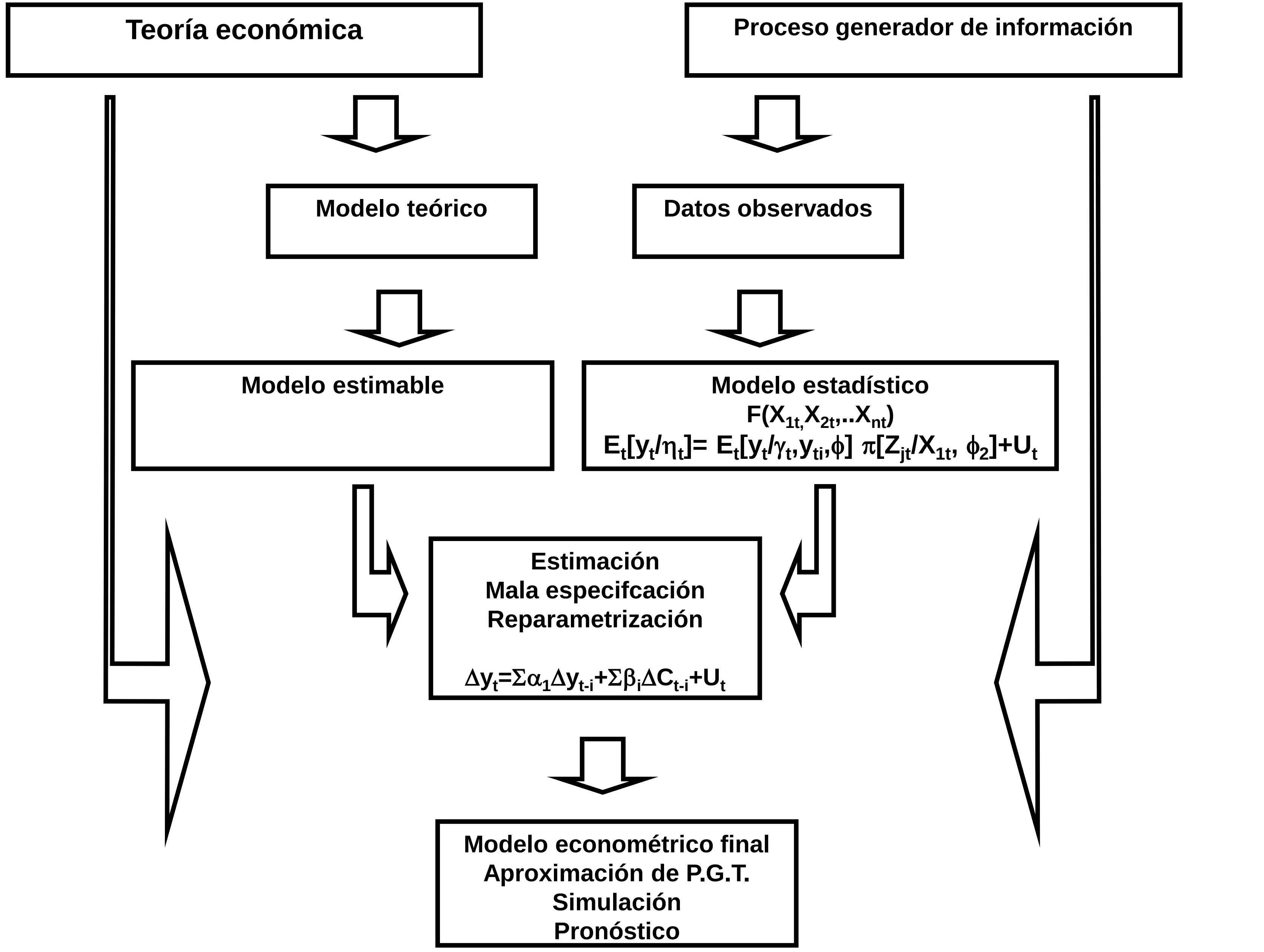
$\mathbf{u} | \mathbf{X} \xrightarrow{d} N[0, \sigma^2 \mathbf{I}]$

5) No existe correlación entre los regresores y el término de error

$E(\mathbf{u} | \mathbf{X}) = 0$

6) La forma funcional es lineal

7) Los parámetros del modelo son invariantes a lo largo de la muestra.


Teoría económica
Proceso generador de información
Modelo teórico
Datos observados
Modelo estimable
Modelo estadístico
$F(X_{1t,}X_{2t},..X_{nt})$
$E_t[y_t/\eta_t]= E_t[y_t/\gamma_t,y_{ti},\phi]\ \pi[Z_{jt}/X_{1t},\ \phi_2]+U_t$
Estimación
Mala especifcación
Reparametrización
$\Delta y_t=\Sigma\alpha_1\Delta y_{t-i}+\Sigma\beta_i\Delta C_{t-i}+U_t$
Modelo econométrico final
Aproximación de P.G.T.
Simulación
Pronóstico

1) **Consistencia con la teoría económica**. Implica que el modelo estimado debe satisfacer las restricciones impuestas por la teoría económica sobre la especificación inicial y los valores de los coeficientes.

2) **El modelo es admisible respecto a los datos**. La condición se refiere a que las predicciones de la ecuación estimada debe generar resultados que sean lógicos de acuerdo a la teoría económica.

3) **Coherencia con los datos**. El modelo debe reproducir adecuadamente el comportamiento de los datos. De manera que las innovaciones del modelo no deben presentar autocorrelación y heteroscedasticidad (deben ser ruido blanco).

4) **Parámetros constantes.** Esta condición es necesaria para poder utilizar el modelo con propósitos de simulación y pronóstico.

5) **Condicionamiento válido**. Se refiere que las variables explicativas deben ser exógenas débiles. De manera que los parámetros de interés son una función del modelo condicional y no existe información adicional que sea relevante para el modelo.

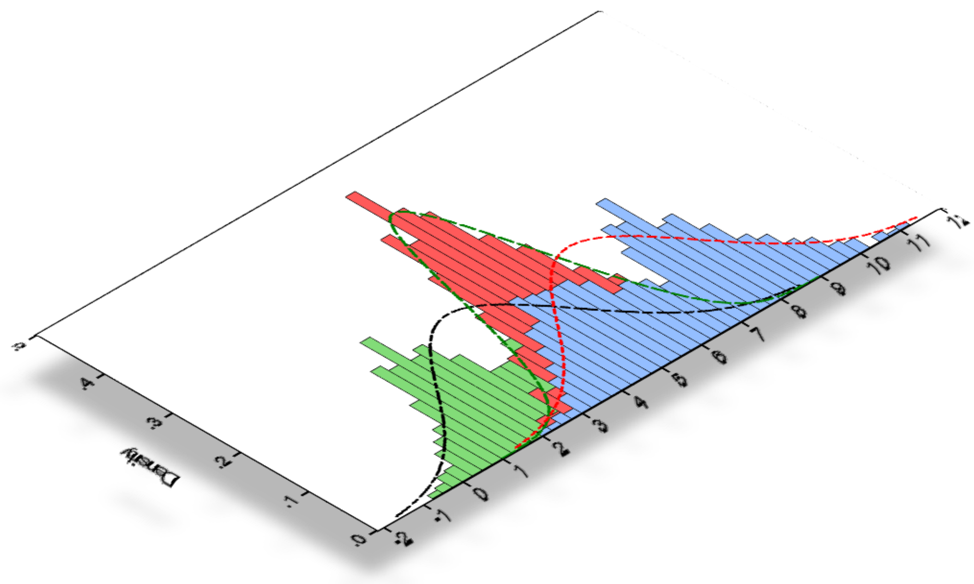
6) **Englobamiento.** El modelo final debe explicar las características básicas de los modelos previos.

Como identificar la mejor ecuación:

- Consistencia con la hipótesis teórica
- Coherencia con los datos (información sistemática)

Criterios	Pruebas generales	Prueba particular
1) Coherente con los datos	Coeficiente de determinación Autocorrelación Heteroscedasticidad	R^2 Durbin Watson, H-Durbin Box-Pierce, Ljung-Box, Multiplicadores de Lagrange Ramsey-Reset, White, Goldfed-Quant, Glejser, Breush-Pagan.
2) Exogeneidad	Haussman	
3) Modelo admisible	Normalidad Cambio estructural	Jarque-Bera Chow, Chow predictiva, CUSUM, CUSUMQ
4) Restricciones válidas	Teoría económica	General a lo especifico
5) Teoría económica	Valor de coeficientes	
6) Englobamiento	Pruebas de varianza	Prueba J

NORMALIDAD



Representación matricial del modelo de regresión múltiple

$$Y = X\beta + U$$

El modelo de regresión múltiple asume diverso supuestos estadísticos que determinan la validez de los resultados econométricos así como la inferencia estadística

Normalidad. El término de error se distribuye como una función de densidad de probabilidad normal con media cero y varianza constante

$$u|X \sim N(0, \sigma_u^2 I)$$

a) Importancia del supuesto de normalidad

En el contexto del modelo de regresión múltiple, los estimadores de MCO se distribuyen como una función de densidad de probabilidad normal

$$\hat{\beta} \rightarrow N\left(\beta, \sigma_u^2 [\mathbf{X}'\mathbf{X}]^{-1}\right)$$

Esta propiedad permite realizar inferencia estadística sobre el modelo a través de probar diferentes hipótesis en los valores de los estimadores

t-Student´s

F-estadística

χ^2 ji-cuadrada

- El rechazo de normalidad en los errores afecta el valor de los estadísticos de las pruebas de hipótesis como el t-Student y F. Los valores de los estadísticos son sensibles a la distribución normal
- El valor del estadístico ji-cuadrada también se ve afectado. Bajo condiciones de No-normalidad el valor crítico del ji-cuadrado se modifica
- Los estimadores siguen siendo insesgados, pero cuando no se cumple el supuesto de normalidad se pierde eficiencia

Prueba de Normalidad

International Statistical Review (1987), **55**, 2, pp. 163–172. Printed in Great Britain
© International Statistical Institute

A Test for Normality of Observations and Regression Residuals

Carlos M. Jarque[1] and Anil K. Bera[2]

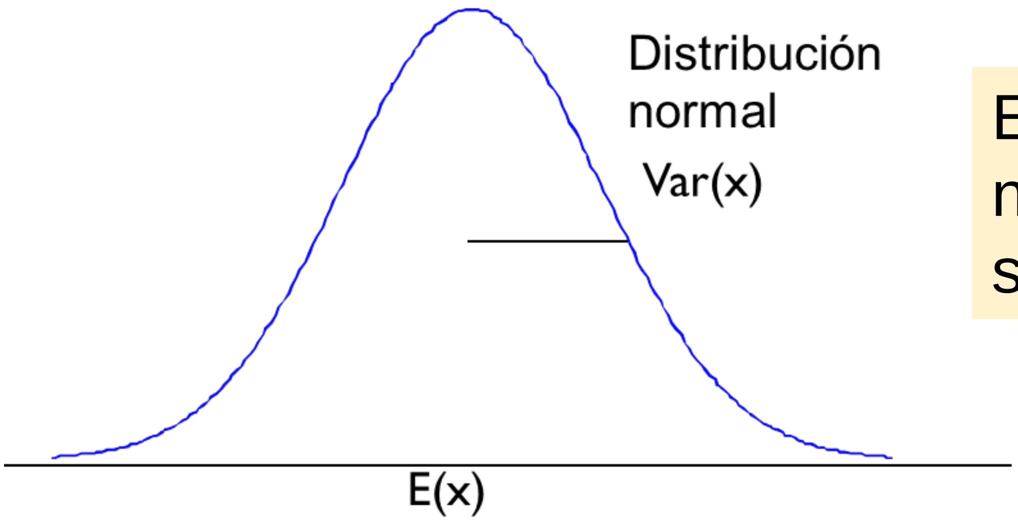
Se basa en el tercer y cuarto momento de la distribución de los errores. Es decir el seso y la curtosis

Tercer momento de la distribución: Sesgo o Simetría

$$E(X-\mu)^3$$

Se construye el coeficiente de sesgo o simetría (SK)

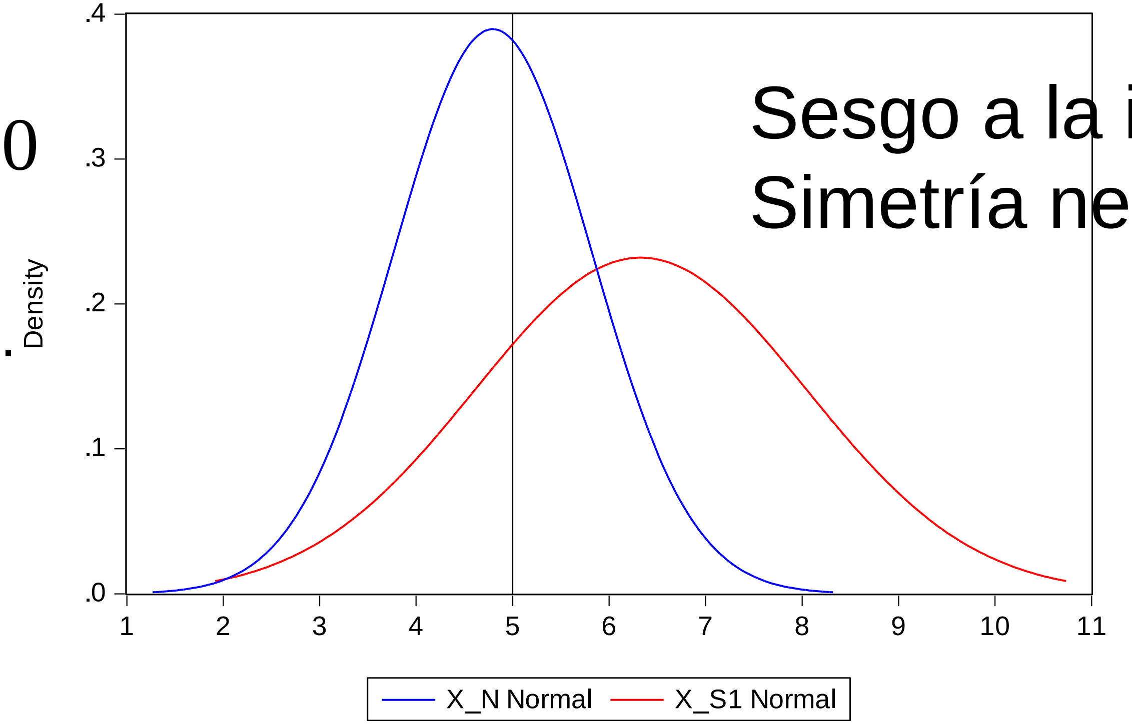
$$SK=\left[\frac{\hat{\mu}^3}{\hat{\sigma}^3}\right],\quad \hat{\mu}_i=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{u}_t^i,\quad \hat{\sigma}=\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{u}_t^2\right]^{1/2}$$



En una distribución normal el coeficiente de sesgo es igual a cero

$$\hat{\alpha}_3 = \left[\frac{\hat{\mu}^3}{\hat{\sigma}^3} \right] < 0$$

-0.11743306...

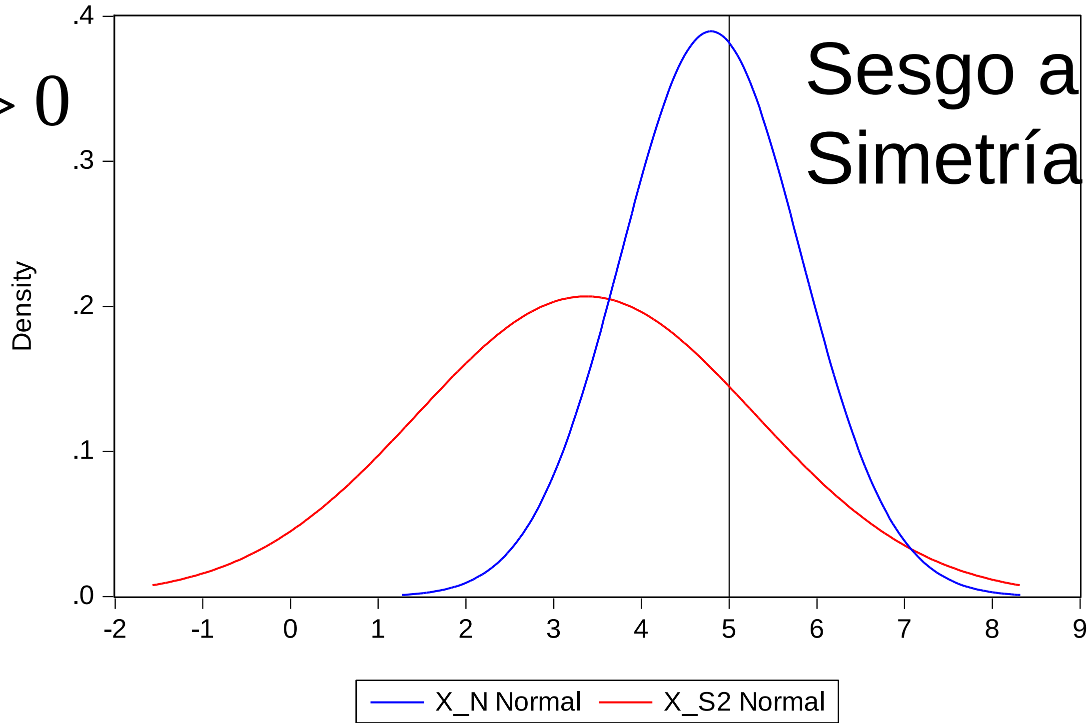


Sesgo a la izquierda

Simetría negativa

Media<Mediana<Moda

$$\hat{\alpha}_3 = \left[\frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\sigma}^3} \right] > 0$$



Sesgo a la derecha

Simetría positiva

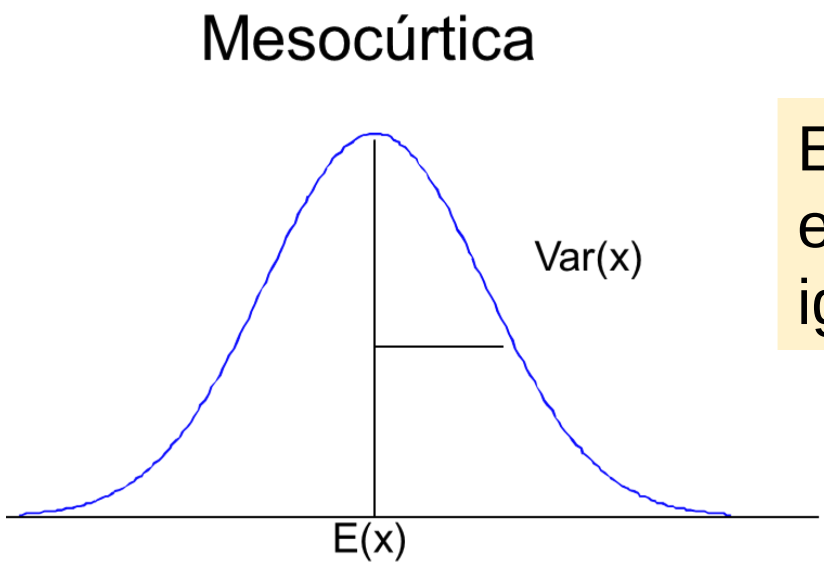
Media>Mediana>Moda

Cuarto momento de la distribución (Curtosis)

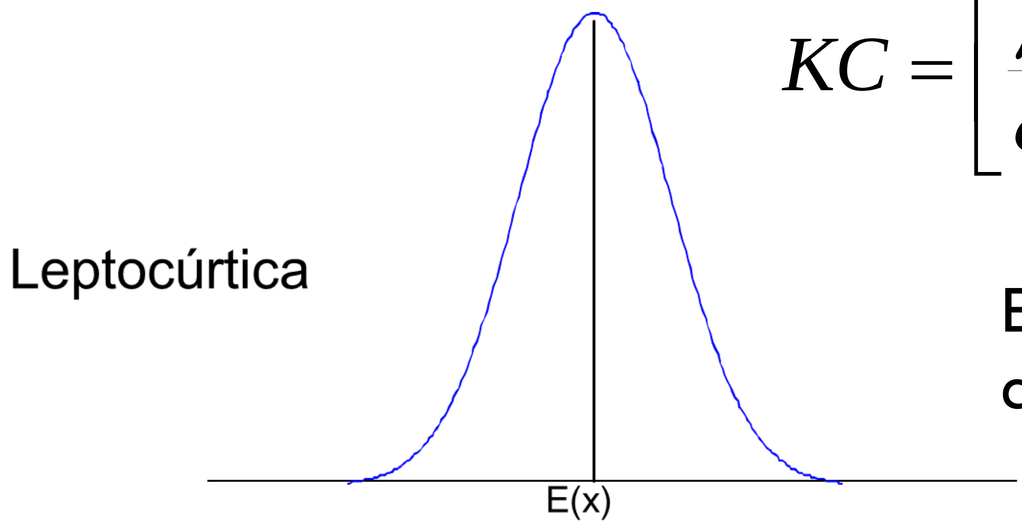
$$E(X-\mu)^4$$

Se construye el coeficiente de curtosis (KC)

$$KC=\left[\frac{\hat{\mu}^4}{\hat{\sigma}^4}\right],\quad \hat{\mu}_i=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{u}_t^i,\quad \hat{\sigma}=\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{u}_t^2\right]^{1/2}$$

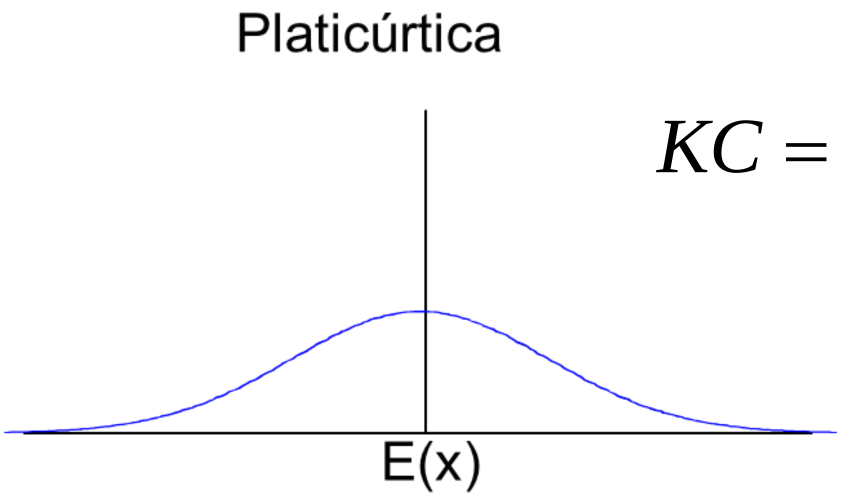


En una distribución normal el coeficiente de curtosis es igual a 3



$$KC = \left[\frac{\hat{\mu}^4}{\hat{\sigma}^4}\right] > 3$$

Exceso de curtosis, el coeficiente es mayor a 3



$$KC = \left[\frac{\hat{\mu}^4}{\hat{\sigma}^4}\right] < 3$$

El coeficiente es menor a 3

Hipótesis nula

$$H_1 : SK = 0 \quad y \quad KC - 3 = 0$$

Se distribuye como una normal

Hipótesis alternativa

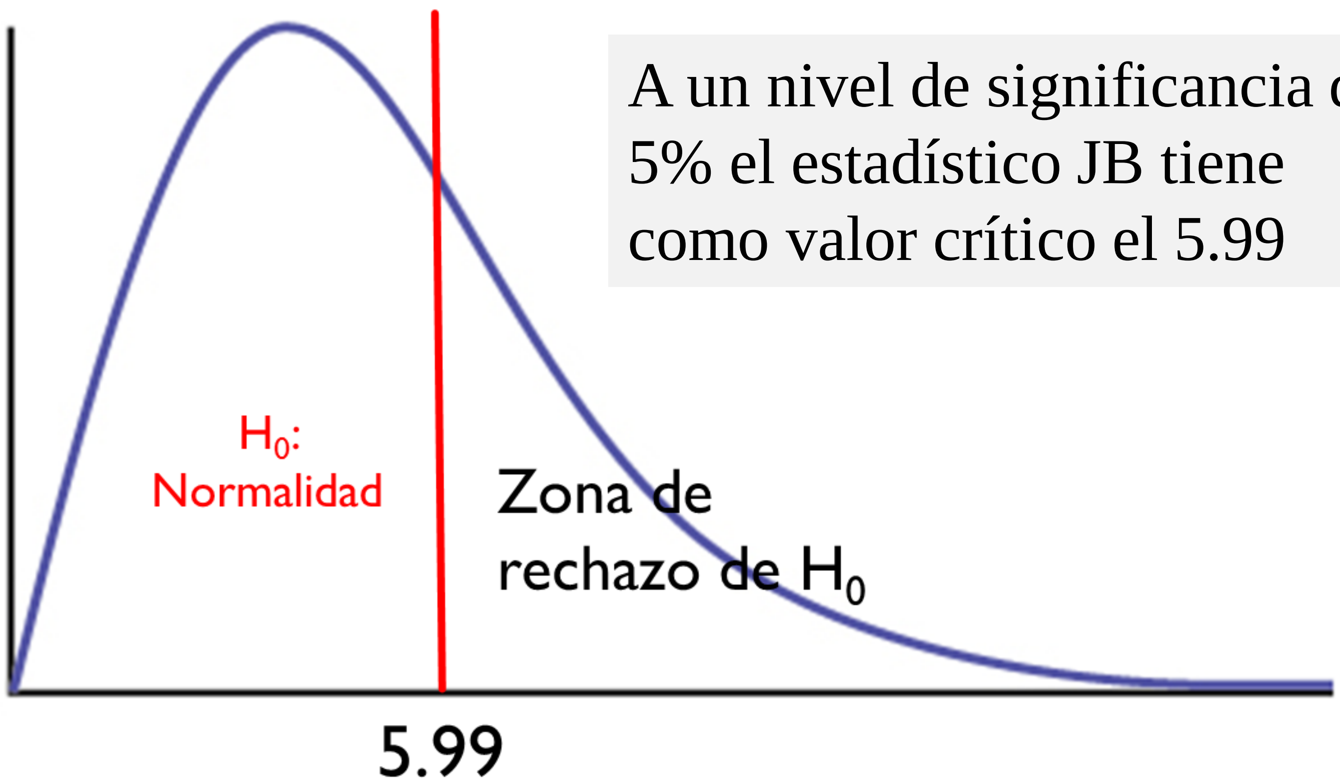
$$H_1 : SK \neq 0 \quad y \quad KC - 3 \neq 0$$

NO se distribuye como una normal

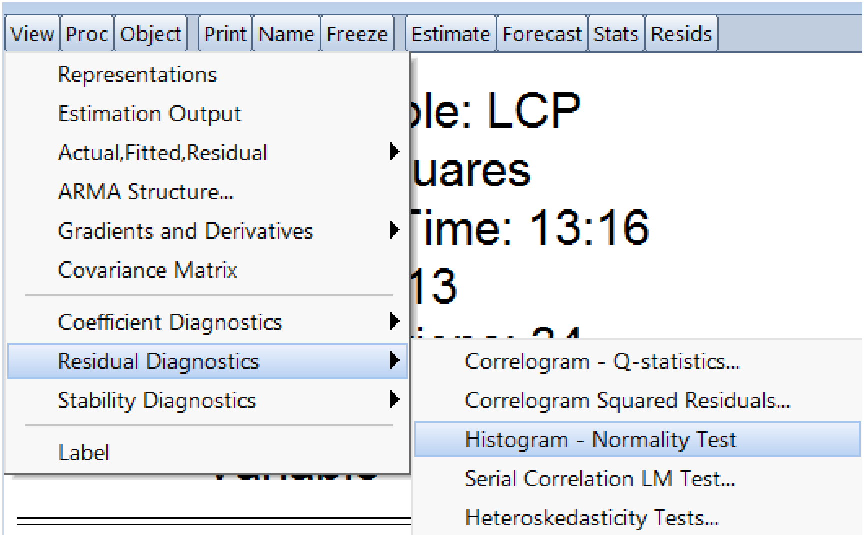
El estadístico se denomina Jarque-Bera (JB) basado en el criterio de multiplicador de Lagrange

$$\boxed{JB = \frac{T}{6} SK^2 + \frac{T}{24} (KC - 3)^2}$$

Bajo la hipótesis nula el estadístico JB se distribuye como una ji-cuadrada con dos grados de libertad, ya que es la suma de dos variables aleatorias normalizadas

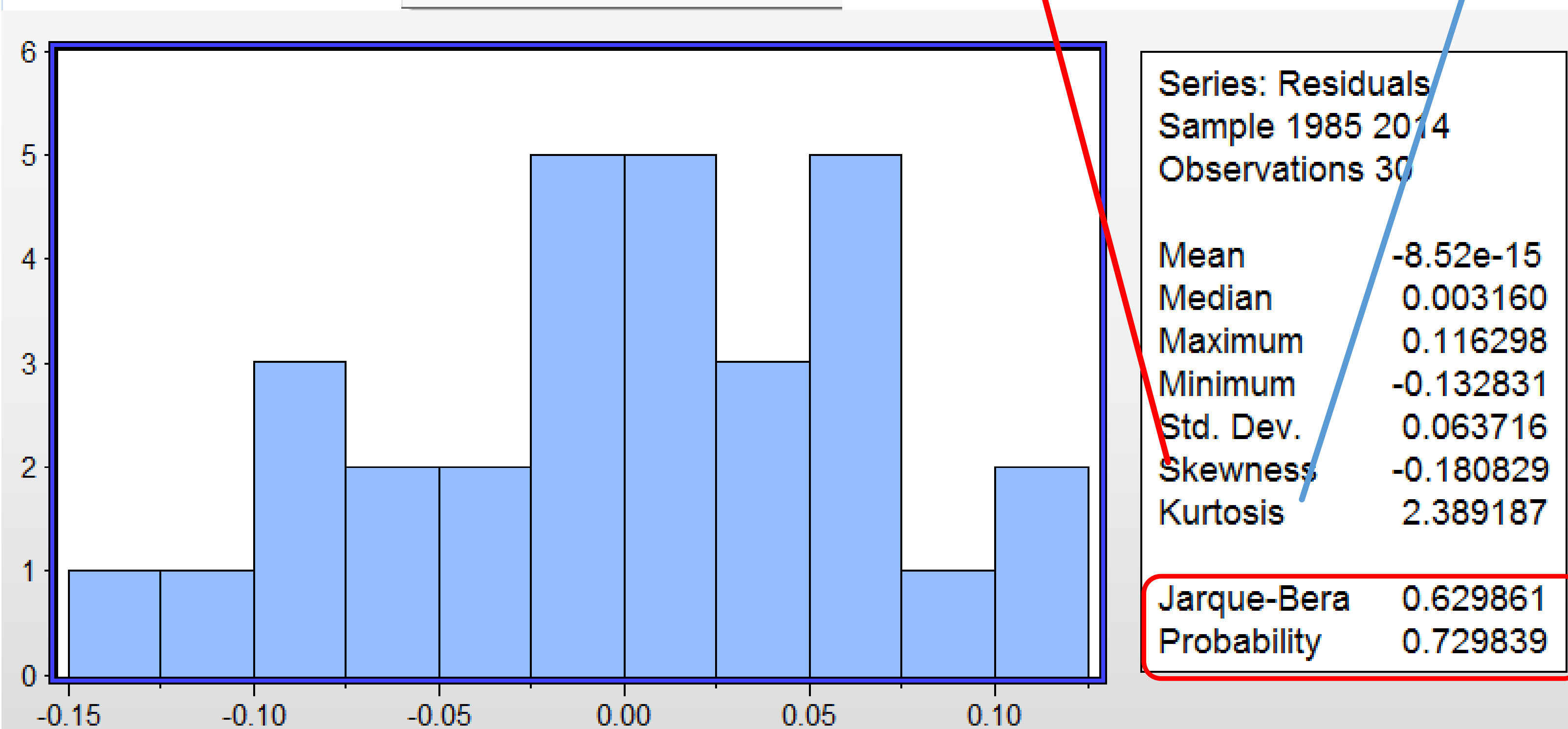


A un nivel de significancia del 5% el estadístico JB tiene como valor crítico el 5.99

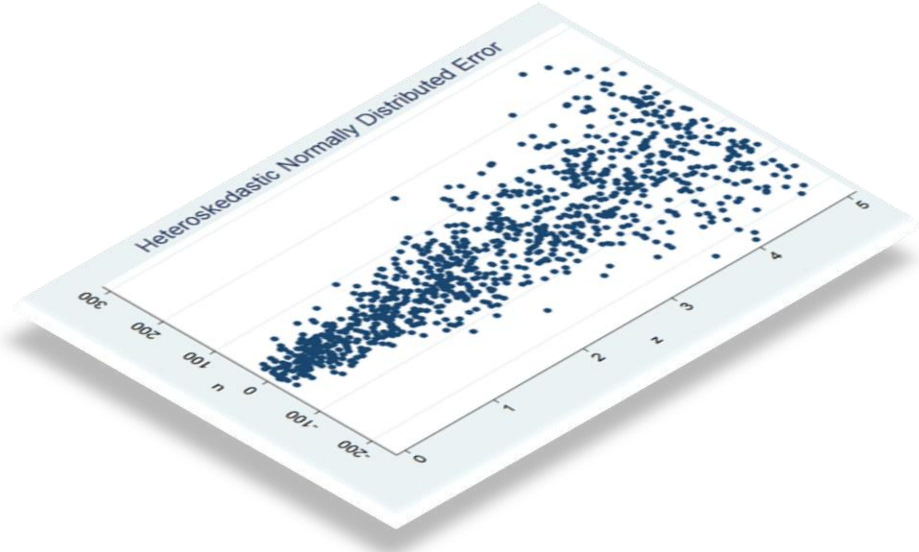


Coeficiente de sesgo

Coeficiente de curtosis



HETEROSCEDASTICIDAD



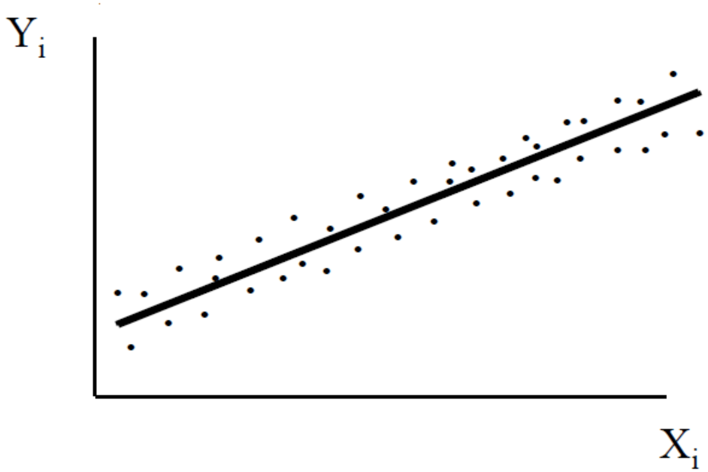
Se asume que los errores del modelo presentan una varianza constante a lo largo de la muestra

$$Var(u_t) = E(u_t^2) = \sigma^2$$

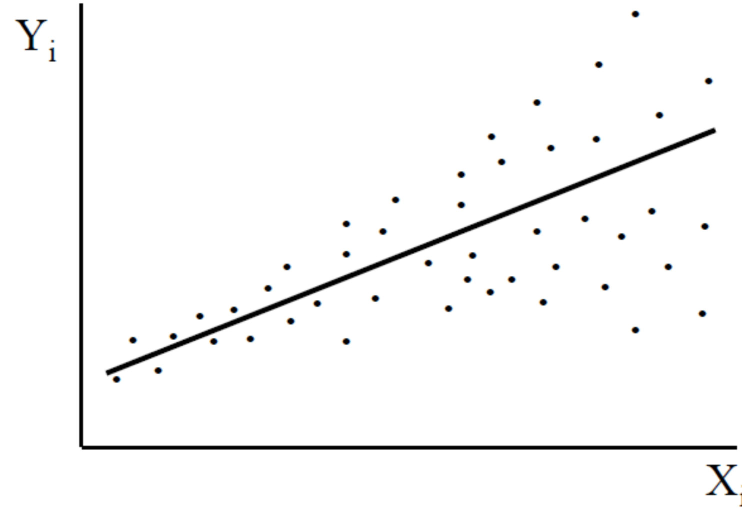
Heteroscedasticidad se define como un patrón sistemático que presentan los errores donde su varianza no es constante

$$Var(u_t) = \sigma_t^2$$

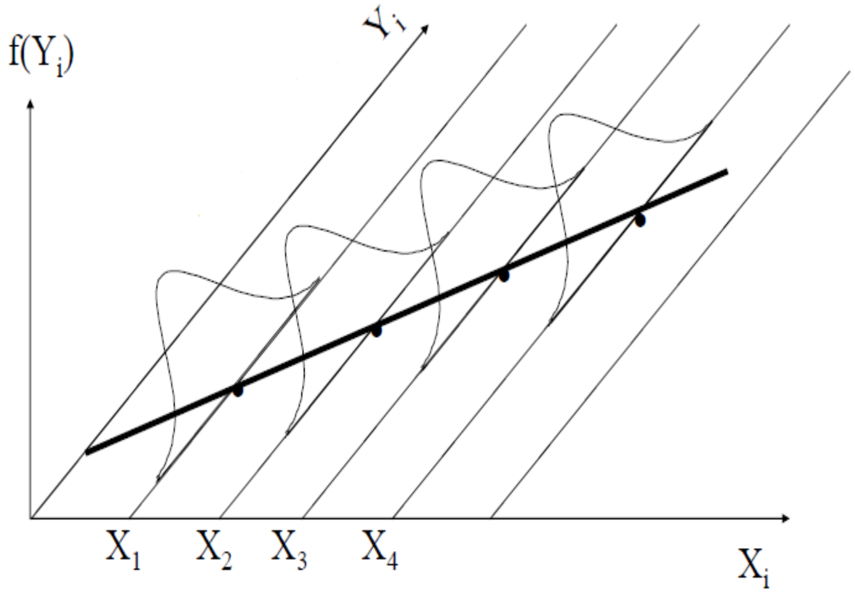
Varianza constante



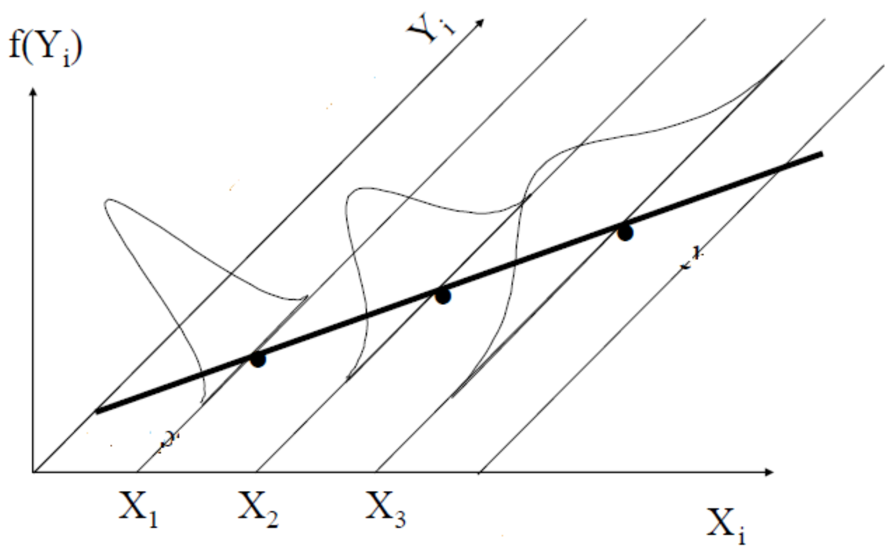
Heteroscedasticidad



Varianza constante



Heteroscedasticidad



Implicaciones del problema de Heteroscedasticidad

Considerando el modelo de regresión múltiple

$$\mathrm{Y} = \mathrm{X}\beta + \mathrm{u}$$

Los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios

$$\hat{\beta} = \left(\mathrm{X}'\mathrm{X}\right)^{-1}\mathrm{X}'\mathrm{Y}$$

La varianza del estimador se obtiene como:

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = E\left[\left(\hat{\beta} - \beta\right)\left(\hat{\beta} - \beta\right)'\right]$$

$$Var\left(\hat{\beta}\right) = (X'X)^{-1}X'E(uu')X(X'X)^{-1}$$

La matriz de covarianzas y varianzas del error

$$(uu') = [u_1 \quad \cdots \quad u_T]\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \cdots & u_1u_T \\ u_2u_1 & u_2^2 & \cdots & u_2u_T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_Tu_1 & u_Tu_2 & \cdots & u_T^2 \end{bmatrix}$$

$$E(uu') = \begin{bmatrix} E(u_1^2) & E(u_1u_2) & \cdots & E(u_1u_T) \\ E(u_2u_1) & E(u_2^2) & \cdots & E(u_2u_T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(u_Tu_1) & E(u_Tu_2) & \cdots & E(u_T^2) \end{bmatrix}$$

Varianza del error

Considerando que la covarianza de los términos de error son iguales a cero, es decir no hay autocorrelación

$$E\left(u_i u_j\right) = 0 \quad \text{Para } i \neq j$$

$$E(u_1 u_2) = E(u_1 u_3) = \cdots E(u_T u_{T-1}) = 0$$

El supuesto del modelo econométrico es que la varianza es constante en el tiempo o a lo largo de la muestra

$$E(u_1^2) = E(u_2^2) = \cdots E(u_T^2) = \sigma^2$$

La matriz de varianzas y covarianzas del término de error se define como:

$$E(uu') = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{I}$$

Se utiliza un estimador de la varianza de los errores

$$S^2 = \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}{T - k - 1}$$

Donde k es el número de variables explicativas

La varianza del estimador se define como:

$$Var(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}\sigma^2\mathbf{I}\boxed{X'X(X'X)^{-1}}$$

Matriz identidad

$$Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(X'X)^{-1}$$

Podemos utilizar el estimador de la varianza

$$Var(\hat{\beta}) = S^2(X'X)^{-1}$$

Cuando existe un problema de heteroscedasticidad la matriz de covarianza es distinta a $\sigma^2\mathbf{I}$

$$E(uu') = \mathbf{V} \neq \sigma^2\mathbf{I}$$

La varianza del estimador se modifica:

$$Var(\hat{\beta}) = (X'X)^{-1}X'\mathbf{V}X(X'X)^{-1}$$

Consecuencias de la heteroscedasticidad

$$\sigma^2(X'X)^{-1} \neq (X'X)^{-1}\mathbf{X'VX}(X'X)^{-1}$$

- La principal consecuencia de la heteroscedasticidad es que los estimadores de MCO pierden eficiencia
- La construcción de los intervalos de confianza de los estimadores utiliza el error estándar de los errores, en consecuencia no son apropiados
- La prueba t-Student pierde potencia por que también utiliza el error estándar del estimador

Pruebas para detectar Heteroscedasticidad

Prueba White de heterosecadasticidad

A Heteroskedasticity-Consistent Covariance Matrix Estimator and a Direct Test for Heteroskedasticity

Halbert White

Econometrica, Vol. 48, No. 4 (May, 1980), 817-838.

En este caso la heteroscedasticidad del error puede estar asociado a las variables explicativas del modelo

$$\sigma_t^2 = f(X_t)$$

Pruebas para detectar Heteroscedasticidad

a) White: Términos Cruzados

Esta prueba asume que la heteroscedasticdad es función de la variables independientes de la ecuación inicial

Estimar el modelo:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Z_t + u_t$$

Obtener la serie de los errores y estimar la regresión auxiliar

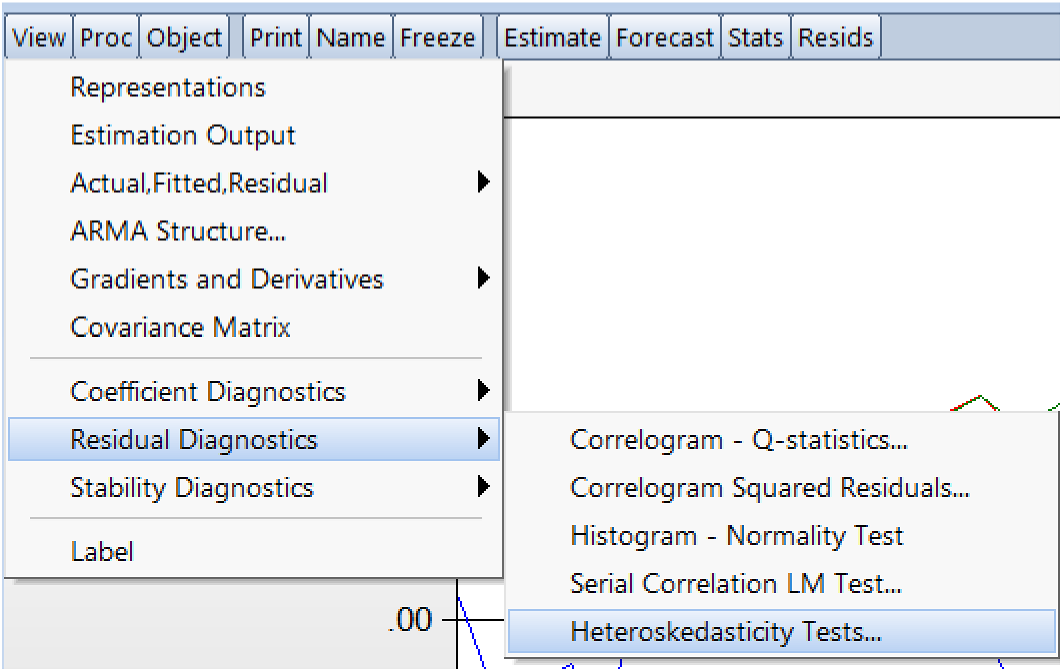
Especificación de la prueba, por medio de la regresión auxiliar

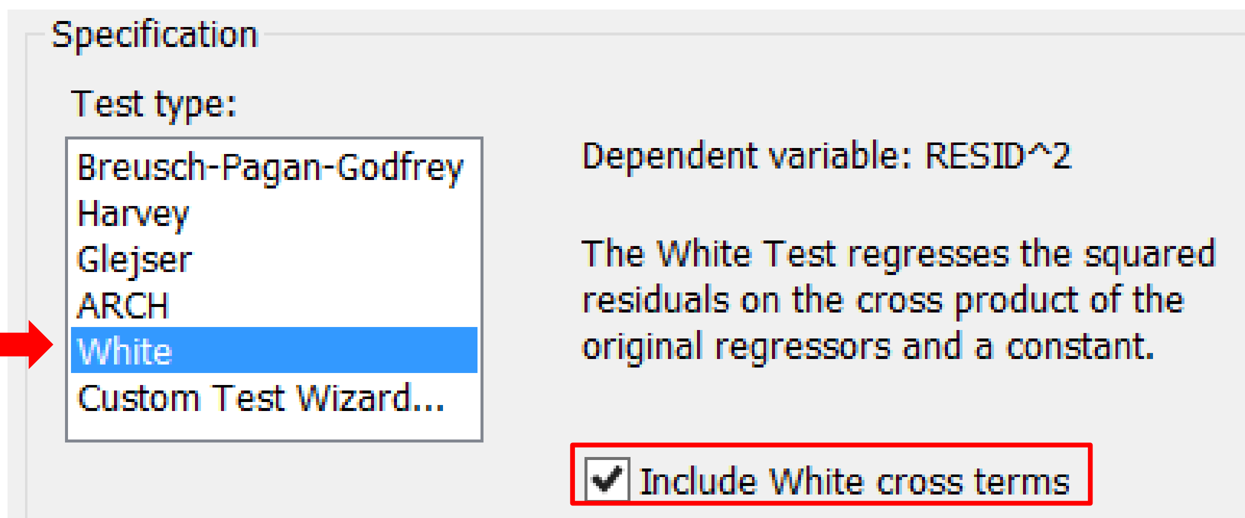
$$\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 X^2{}_t + \alpha_3 X_t Z_t + \alpha_4 Z_t + \alpha_5 Z^2{}_t + e_t$$

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$$

$$H_1 : \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0, \alpha_3 \neq 0, \alpha_4 \neq 0, \alpha_5 \neq 0$$

La Hipótesis nula asume que no existen problemas de heteroscedasticidad y la Hipótesis alternativa indica la presencia de problemas de heteroscedasticidad


View
Proc
Object
Print
Name
Freeze
Estimate
Forecast
Stats
Resids
Representations
Estimation Output
Actual,Fitted,Residual
ARMA Structure...
Gradients and Derivatives
Covariance Matrix
Coefficient Diagnostics
Residual Diagnostics
Stability Diagnostics
Label
.00
Correlogram - Q-statistics...
Correlogram Squared Residuals...
Histogram - Normality Test
Serial Correlation LM Test...
Heteroskedasticity Tests...


Specification
Test type:
Breusch-Pagan-Godfrey
Harvey
Glejser
ARCH
White
Custom Test Wizard...
Dependent variable: RESID^2
The White Test regresses the squared residuals on the cross product of the original regressors and a constant.
Include White cross terms

Heteroskedasticity Test: White

F-statistic	1.058606	Prob. F(5,24)	0.4074
Obs*R-squared	5.420773	Prob. Chi-Square(5)	0.3667
Scaled explained SS	3.049840	Prob. Chi-Square(5)	0.6923

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-11.97942	8.737454	-1.371042	0.1830
LPRG^2	-0.016381	0.025617	-0.639467	0.5286
LPRG*LY	0.007872	0.044160	0.178251	0.8600
LPRG	-0.102876	0.697961	-0.147396	0.8841
LY^2	-0.046929	0.034729	-1.351288	0.1892
LY	1.499641	1.101609	1.361319	0.1861

La probabilidad del estadístico F indica que no se rechaza la hipótesis nula por lo tanto la varianza no depende de sus valores pasados NO HAY heteroscedasticidad

Prueba ARCH de Heteroscedasticidad

Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation

Robert F. Engle

Econometrica, Vol. 50, No. 4. (Jul., 1982), pp. 987-1007.

En esta prueba se asume que la varianza de los errores es una función de sus propios valores pasados

$$\sigma_t^2 = f(\sigma_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2, \cdots, \sigma_{t-p}^2)$$

Se utiliza en datos de series de tiempo. Los valores pasados de la varianza contienen toda la información relevante para explicar la varianza en el periodo actual

Especificación ARCH(1)

Estimar el modelo original

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Z_t + u_t$$

Obtener la serie de los errores y especificar la siguiente regresión auxiliar

$$\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{u}_{t-1}^2 + e_t$$

$$H_0 : \alpha_1 = 0$$ No hay heteroscedasticidad

$$H_1 : \alpha_1 \neq 0$$ Problemas de heteroscedasticidad

Especificación ARCH(2)

$$\hat{u}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{u}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{u}_{t-2}^2 + e_t$$

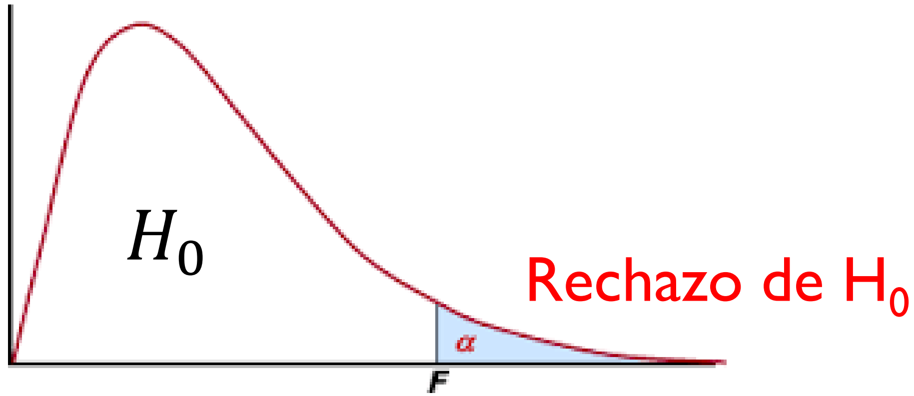
$$H_0 : \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0$$

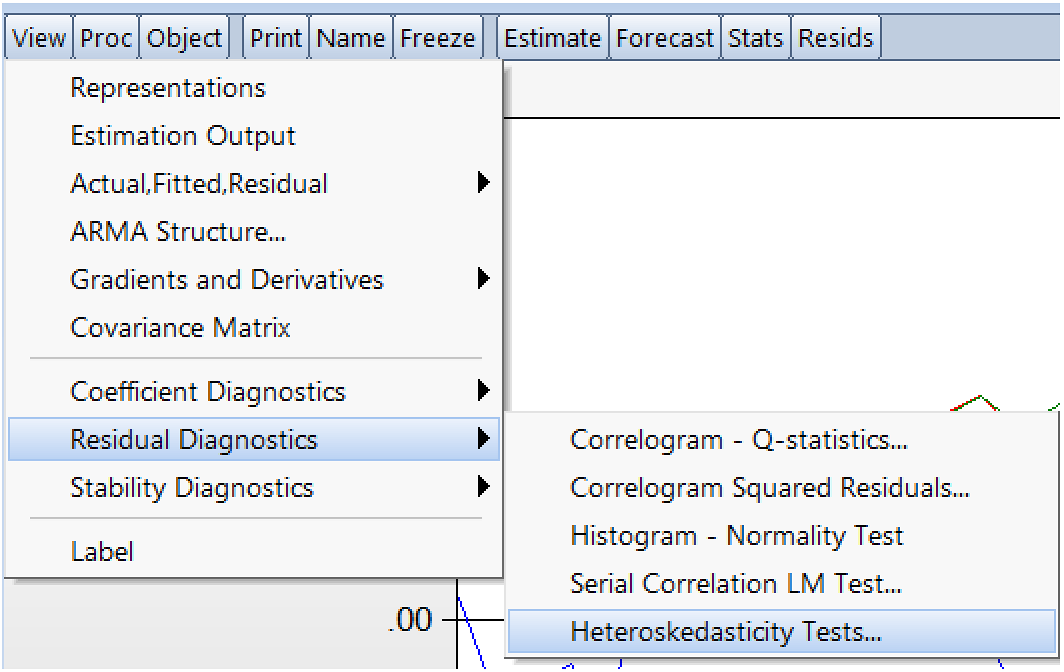
No hay heteroscedasticidad

$$H_1 : \alpha_1 \neq 0,\ \alpha_2 \neq 0$$

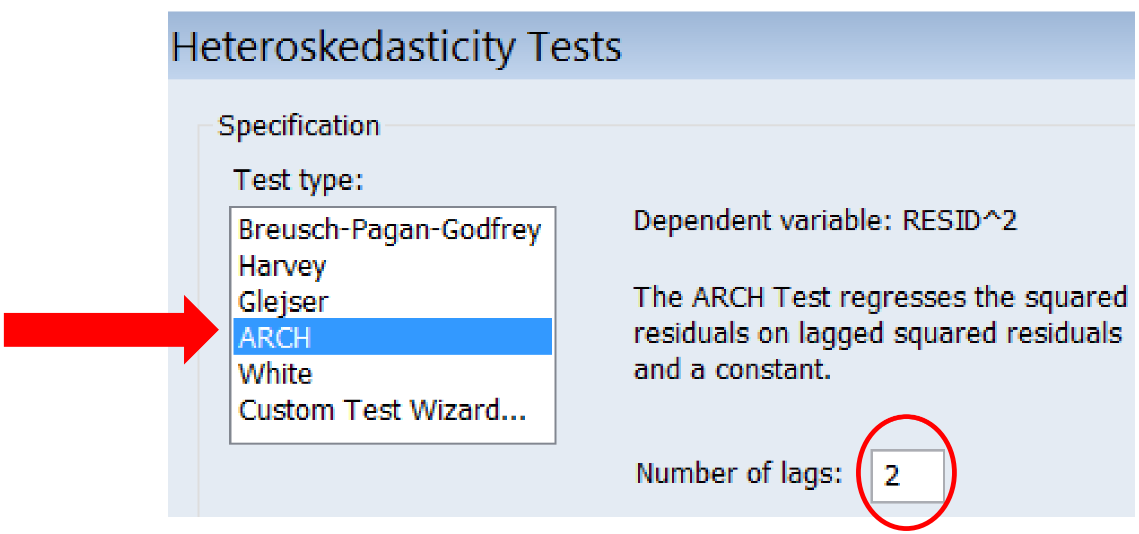
Problemas de heteroscedasticidad

El estadístico de la prueba se distribuye como una F





View
Proc
Object
Print
Name
Freeze
Estimate
Forecast
Stats
Resids
Representations
Estimation Output
Actual,Fitted,Residual
ARMA Structure...
Gradients and Derivatives
Covariance Matrix
Coefficient Diagnostics
Residual Diagnostics
Stability Diagnostics
Label
.00
Correlogram - Q-statistics...
Correlogram Squared Residuals...
Histogram - Normality Test
Serial Correlation LM Test...
Heteroskedasticity Tests...



Heteroskedasticity Tests
Specification
Test type:
Breusch-Pagan-Godfrey
Harvey
Glejser
ARCH
White
Custom Test Wizard...
Dependent variable: RESID^2
The ARCH Test regresses the squared residuals on lagged squared residuals and a constant.
Number of lags:
2

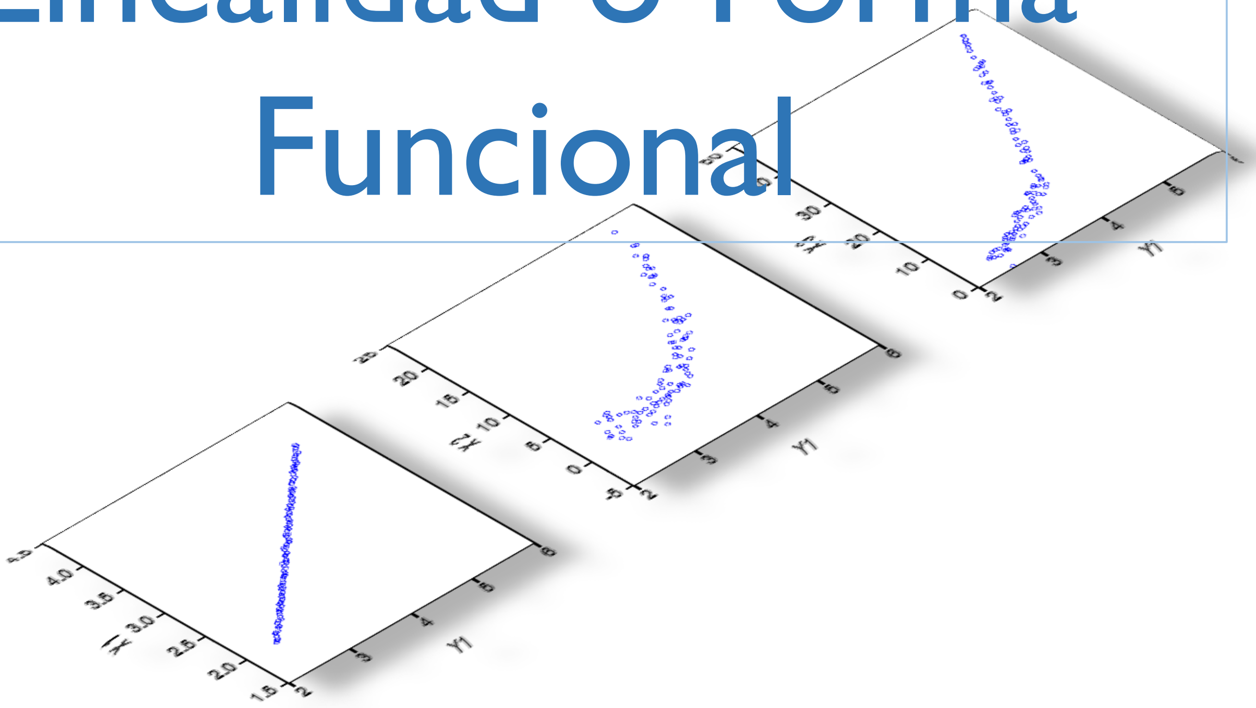
Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	4.855863	Prob. F(2,25)	0.0165
Obs*R-squared	7.833904	Prob. Chi-Square(2)	0.0199

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.002640	0.001138	2.319278	0.0288
RESID^2(-1)	0.591550	0.190317	3.108238	0.0046
RESID^2(-2)	-0.237331	0.192382	-1.233647	0.2288

La probabilidad del estadístico F indica que no se rechaza la hipótesis nula por lo tanto la varianza no depende de sus valores pasados NO HAY heteroscedasticidad

Linealidad o Forma Funcional



El problema de una mala especificación de la forma funcional en el modelo, esta asociado a no considerar de manera correcta la relación entre la variable dependiente y la variable explicativa

Por ejemplo: en un modelo de una sola variable explicativa

$$(1) \qquad Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

Asumiendo que se omite un efecto de la variable explicativa, por ejemplo X_t^2 El modelo debería ser estimado como

$$(2)\ Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \gamma X_t^2 + u_t$$

En la ecuación (1) el efecto entre la variable explicativa y la variable dependiente estaría definida como:

$$\frac{dY_t}{dX_t} = \beta_1$$

Pero en la ecuación (2), que sería la especificación correcta entre las dos variables sería

$$\frac{dY_t}{dX_t} = \beta_1 + 2\gamma X_t$$

Es el efecto no considerado en la primera ecuación. Esto genera que la interpretación de los resultados de la regresión no sean correctos. Es decir, no se mide correctamente la relación entre las variables

Prueba Ramsey-Reset

Tests for Specification Errors in Classical Linear Least-Squares Regression Analysis

J. B. Ramsey

Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), Volume 31, Issue 2 (1969), 350-371.

Es una prueba en el contexto de variables omitidas

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \gamma z + \mathbf{u}$$

La variable Z se pude definir como una función no lineal

$$Z = g(X) + g(X)^2 + \ldots + g(X)^k$$

Especificación de la prueba

Las pruebas utilizadas para comprobar linealidad en el modelo. Se basan en rechazar que el modelo se pruede aproximar como una función polinómica

Hipótesis nula H_0: Lineal

$$E\left(\mathbf{Y} / \mathbf{X} = \mathbf{x}\right) = g(\mathbf{X})$$

Hipótesis alternativa H_1: No lineal

$$E\left(\mathbf{Y} / \mathbf{X} = \mathbf{x}\right) = g(\mathbf{X}) + g(\mathbf{X})^2 + \ldots + g(\mathbf{X})^k$$

Prueba RESET

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{u} \qquad \text{modelo}$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\beta} \qquad \text{estimación}$$

Aproximación a la función polinómica

$$g(\mathbf{X}) + g(\mathbf{X})^2 + \ldots . + g(\mathbf{X})^k =$$

$$\hat{\mathbf{Y}} + \hat{\mathbf{Y}}^2 + \hat{\mathbf{Y}}^3 + \ldots + \hat{\mathbf{Y}}^k$$

Regresión auxiliar

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \gamma_1 \hat{Y}^2 + \gamma_2 \hat{Y}^3 + \cdots \gamma_m \hat{Y}^m + \mathbf{u}$$

$$H_0 : \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_m = 0$$

$$H_1 : \gamma_j \neq 0$$

Ejemplo RESET(1): modelo simple de regresión

Sea estima el modelo $$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

Estimado la variable dependiente $$\hat{Y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_t$$

Se estima la regresión auxiliar $$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 \hat{Y}_t^2 + w_t$$

Se plantea la siguiente prueba de hipótesis

$$H_0 : \alpha_2 = 0$$

Hipótesis nula la forma funcional es lineal

$$H_1 : \alpha_2 \neq 0$$

Hipótesis alternativa la forma funcional NO ES LINEAL

Se utiliza una prueba F

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 \hat{Y}_t^2 + w_t$$ Modelo sin restricción

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$ Modelo con restricción

Se define

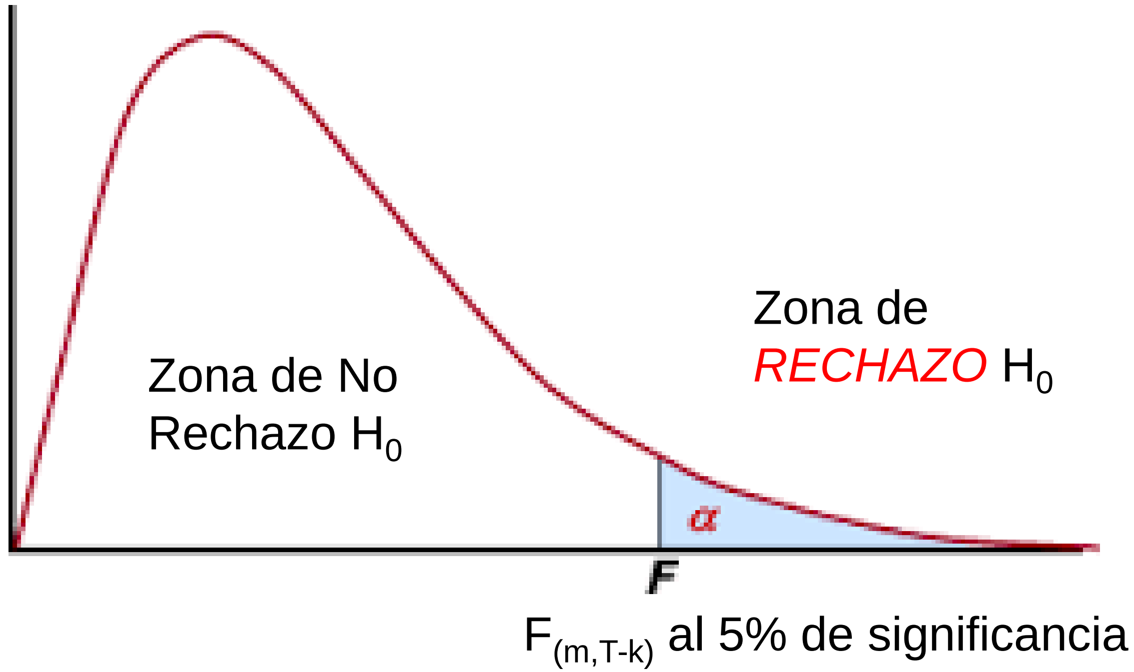
URSS.- suma de errores al cuadrado de la regresión sin restricción

RRSS.- suma de errores al cuadrado de la regresión CON restricción

$$F = \frac{(RRSS - URSS)/m}{URSS/(T-k)}$$

m = es el número de restricciones

k =Número de parámetros en la regresión auxiliar



$$H_0 : \alpha_2 = 0$$

Hipótesis nula la forma funcional es lineal

$$H_1 : \alpha_2 \neq 0$$

Hipótesis alternativa la forma funcional NO ES LINEAL

	Value	df	Probability
t-statistic	1.774694	26	0.0877
F-statistic	3.149539	(1, 26)	0.0877
Likelihood ratio	3.430276	1	0.0640

F-test summary:

	Sum of Sq.	df	Mean Squares
Test SSR	0.012721	1	0.012721
Restricted SSR	0.117732	27	0.004360
Unrestricted SSR	0.105011	26	0.004039

LR test summary:

	Value	df
Restricted LogL	40.53998	27
Unrestricted LogL	42.25511	26

AUTOCORRELACIÓN

SUPUESTO: La covarianza de los términos de error es igual a cero

$$Cov(u_t u_s) = E[u_t u_s] = 0 \quad t \neq s$$

No existe autocorrelación. Los términos de error son estadísticamente independientes, no existe relación entre los errores
Cunado el supuesto no se cumple el modelo presenta problemas de Autocorrelación

$$Cov(u_t u_s) \neq 0$$

Se asume que la relación entre los errores describe un proceso autorregresivo de orden uno $AR(1)$

1) $$u_t = \rho u_{t-1} + v_t$$

Donde $|\rho| < 1$

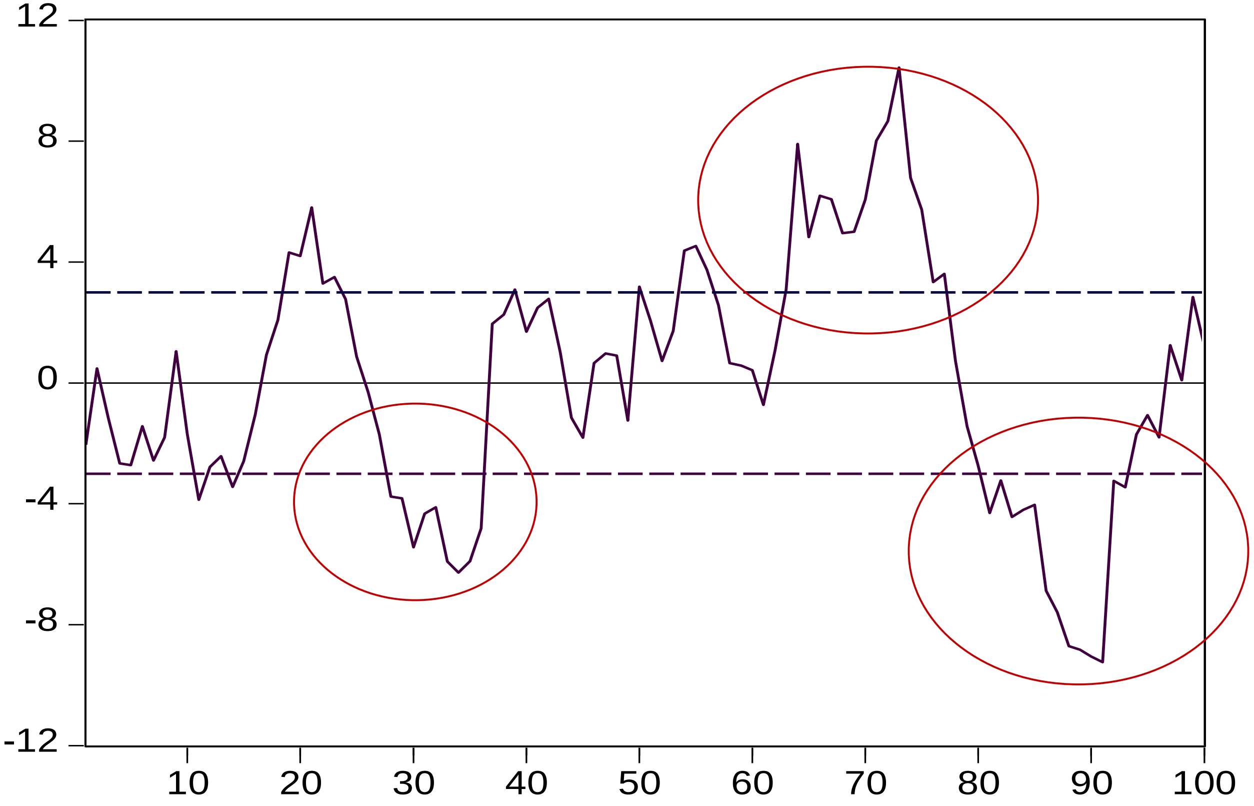
Los supuestos $E(v_t) = 0 \quad Var(v_t) = \sigma_v^2$

No están correlacionados los términos u_{t-1} y v_t

$$E(u_{t-1} v_t) = 0$$

Cúales son las características del término de error bajo el problema de autocorrelación:

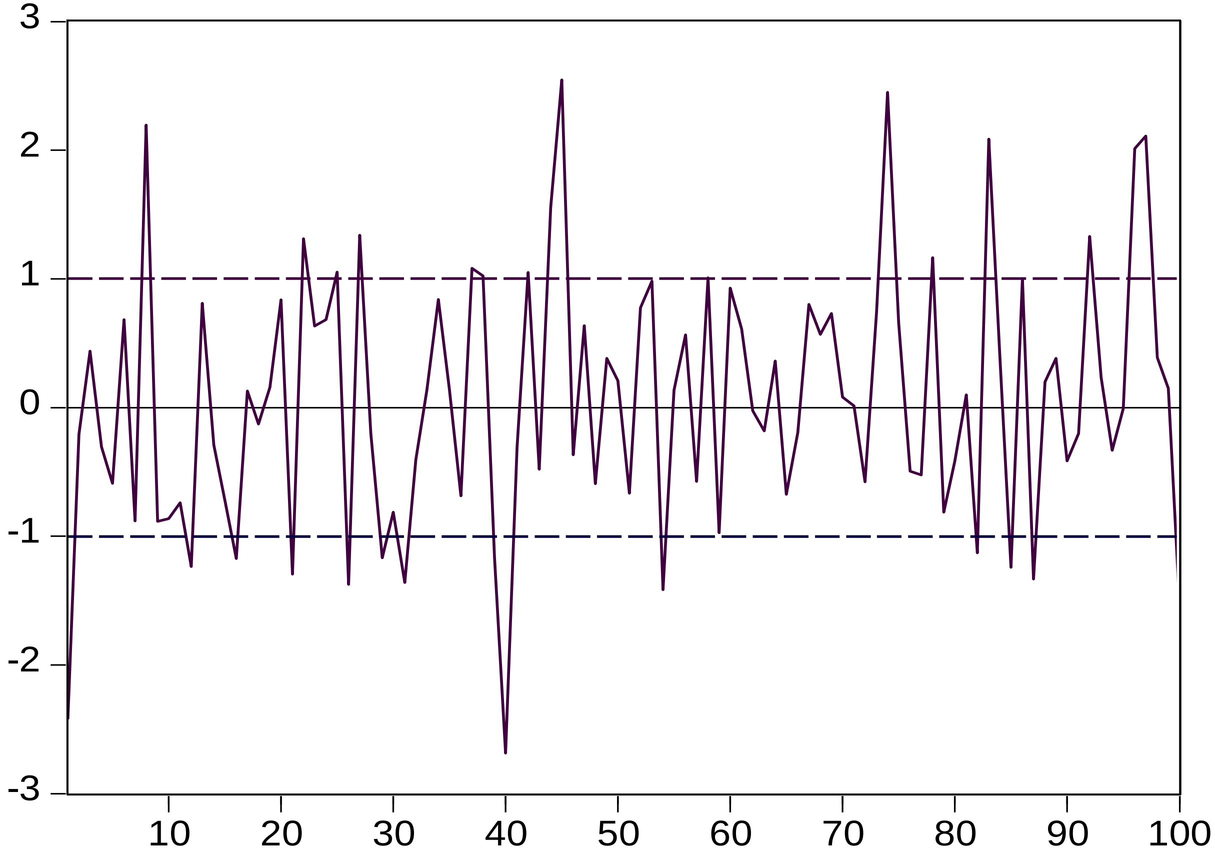
$$\hat{u}_t = \rho\,\hat{u}_{t-1} + \nu_t$$



Autocorrelación

Ante un desajuste del modelo el error se mantiene en varios periodos

No hay autocorrelación, los desajustes se corrigen rápidamente, no hay información sistemática



Se aplica valor esperado a la ecuación (1)

$$E(u_t) = \rho E(u_{t-1}) + E(v_t) = 0$$

La varianza del término de error a partir de la ecuación (1)

$$\mathrm{Var}(\mathrm{u}_t) = \mathrm{E}(\mathrm{u}_t^2) = E(\rho\, \mathrm{u}_{t\text{-}1} + \mathrm{v}_t)^2$$

$$\mathrm{Var}(\mathrm{u}_t) = \mathrm{E}\left[\left(\rho^2 \mathrm{u}_{t\text{-}1}^2 + 2\rho \mathrm{u}_{t\text{-}1}\mathrm{v}_t + \mathrm{v}_t^2\right)\right]$$

$$\mathrm{Var}(\mathrm{u}_t) = \rho^2 \mathrm{E}(\mathrm{u}_{t\text{-}1}^2) + \boxed{2\rho \mathrm{E}(\mathrm{u}_{t\text{-}1}\mathrm{v}_t)} + \mathrm{E}(\mathrm{v}_t^2)$$

Igual a cero

$$\mathrm{Var}(\mathrm{u_t}) = \rho^2\sigma_u^2 + \sigma_\nu^2$$

$$\sigma_u^2 = \rho^2\sigma_u^2 + \sigma_\nu^2$$

Despejando para σ^2

$$\boxed{\sigma_u^2 = \frac{\sigma_\nu^2}{1-\rho^2}}$$

El resultado importante es que la varianza del error depende del coeficiente rho

Cuando rho se acerca al valor de uno la varianza crece, cuando rho se acerca al valor de cero la varianza del error es igual a σ_v^2

Que sucede con la covarianza del error

$$E(u_{t-i}u_{t-j})$$

Desarrollando el caso de $E(u_t u_{t-1})$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(u_t u_{t-1}) &= \mathrm{Cov}((\rho u_{t-1} + \nu_t)u_{t-1}) \\
&= \rho \mathrm{Cov}(u_{t-1}u_{t-1}) + \mathrm{Cov}(\nu_t u_{t-1}) \\
&= \rho \mathrm{Var}(u_{t-1}) + \boxed{E(\nu_t u_{t-1})}
\end{aligned}$$

Igual a cero

$$\mathrm{Cov}(u_t u_{t-1}) = \rho \frac{\sigma_\nu^2}{(1-\rho^2)}$$

$$\mathrm{Cov}(u_t u_{t-1}) = \rho\, \sigma_u^2$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(u_t u_{t-2}) &= \mathrm{Cov}((\rho u_{t-1} + v_t) u_{t-2}) \\ &= \rho \mathrm{Cov}(u_{t-1} u_{t-2}) + \mathrm{Cov}(v_t u_{t-2}) \\ &= \rho \mathrm{Cov}(u_{t-1} u_{t-2}) \\ &= \rho \mathrm{Cov}((\rho u_{t-2} + v_{t-1}) u_{t-2}) \\ &= \rho^2 \mathrm{Cov}(u_{t-2} u_{t-2}) + \mathrm{Cov}(v_{t-1} u_{t-2})\end{aligned}$$

Igual a cero

$$\mathrm{Cov}(u_t u_{t-2}) = \rho^2 \mathrm{Var}(u_{t-2} u_{t-2}) = \rho^2 \mathrm{E}(u_{t-2}^2)$$

$$\mathrm{Cov}(u_t u_{t-2}) = \rho^2 \frac{\sigma_v^2}{1 - \rho^2}$$

Nota $u_{t-2} = \rho u_{t-1} + v_{t-1}$

$$\mathrm{Cov}(u_t u_{t-1}) = \rho\,\sigma_u^2$$

$$\mathrm{Cov}(u_t u_{t-2}) = \rho^2 \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}$$

$$\mathrm{Cov}(u_t u_{t-3}) = \rho^3 \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{Cov}(u_t u_{t-s}) = \rho^s \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}$$

La covarianza de los errores depende de coeficiente de correlación

La matriz de varianzas y covarianzas de los errores se modifica:

$$E(u_t u_t') = \begin{bmatrix} E(u_1^2) & \cdots & E(u_1 u_T) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(u_1 u_T) & \cdots & E(u_T^2) \end{bmatrix}$$

Asumiendo que la varianza de los errores es constante

$$E(u_1^2) = E(u_2^2) = \cdots = E(u_n^2) = \sigma_u^2 = \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2}$$

$$Cov(u_t u_s) = E[u_t u_s] = \frac{\rho^k \sigma_u^2}{1-\rho^2}$$

Se define una nueva matriz de varianzas y covarianzas

$$\mathbf{V} = \sigma_u^2 \Omega = \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2} \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho^2 \ldots & \rho^{T-1} \\ \rho & 1 & \ldots & \rho^{T-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \rho^{T-1} & \rho^{T-2} & \rho^{T-3} \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Consecuencias de la autocorrelación

En el contexto de la representación matricial del modelo econométrico

$$Y_t = X_t\beta + U_t$$

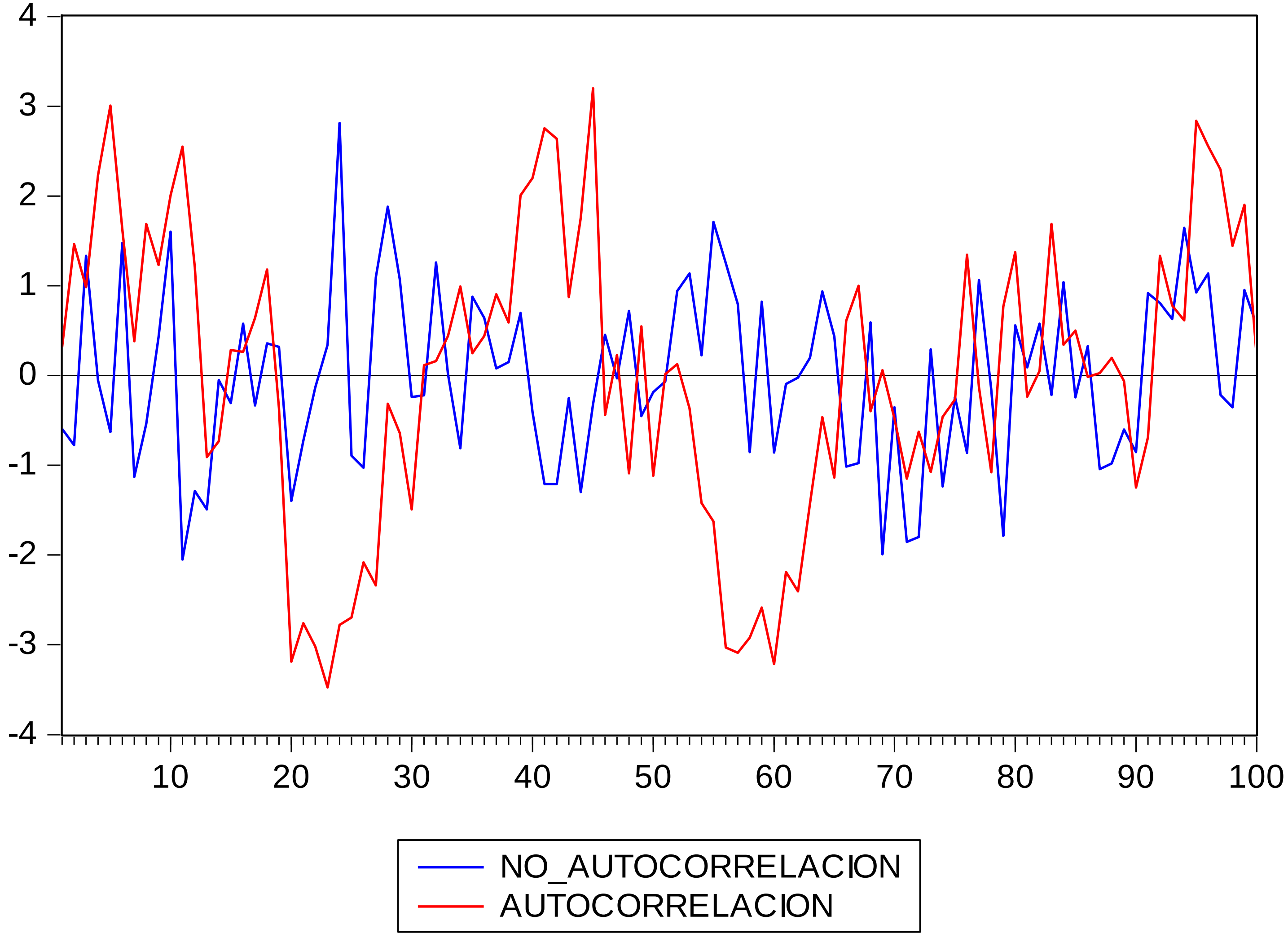
Las propiedades del término de error

$$U_t \sim N(0, \sigma^2 \Omega)$$

El estimador de mínimos cuadrados ordinarios sigue siendo lineal e insesgado, pero pierde eficiencia

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2 (X_t' X_t)^{-1} X_t' \Omega X_t (X_t' X_t)^{-1})$$

Comparativo errores con y sin autocorrelación



Estadístico Durbin-Watson

Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression: I
Author(s): J. Durbin and G. S. Watson
Source: *Biometrika*, Vol. 37, No. 3/4 (Dec., 1950), pp. 409-428

Testing for Serial Correlation in Least Squares Regression. II
Author(s): J. Durbin and G. S. Watson
Source: *Biometrika*, Vol. 38, No. 1/2 (Jun., 1951), pp. 159-177

Se asume que los errores dependen del periodo anterior

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$$

La hipótesis nula (H_0) es que no existe autocorrelación.

$$H_0: \rho = 0$$

La hipótesis alternativa es que el parámetro rho sea diferente de cero

$$H_a: \rho \neq 0$$

Si rho es diferente de cero se puede plantear el caso de que $\rho < 0$, también $\rho > 0$. En este contexto Durbin y Watson plantean un estadístico cuya distribución tenga una hipótesis alternativa con dos alternativas

$$H_{a1}: \rho < 0 \qquad H_{a2}: \rho > 0$$

Durbin y Watson proponen un estadístico cuya distribución permita manejar dos límites: uno superior y otro inferior

$$r_L \leq r \leq r_U$$

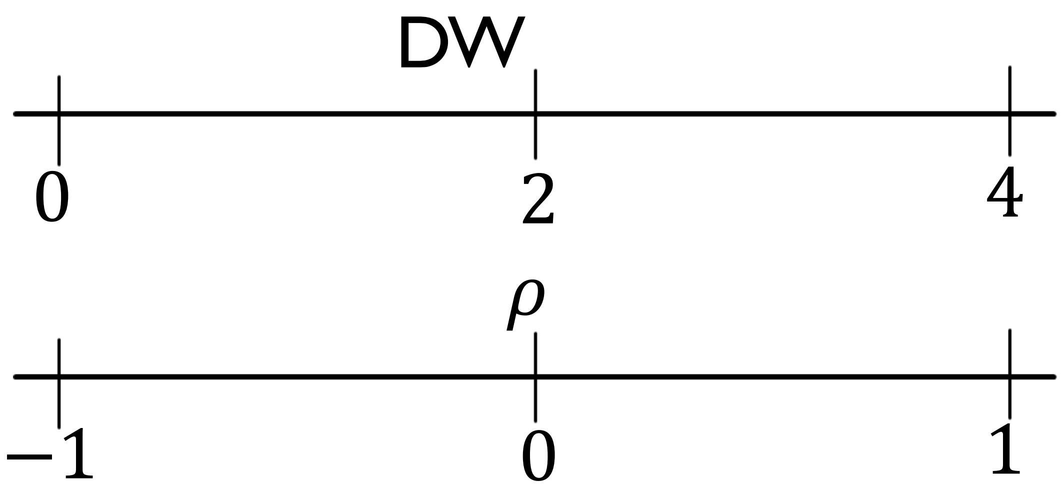
El estadístico propuesto es el denominado *d* o estadístico Durbin Watson, que se define como la razón de la suma del cuadrado de la primera diferencia de los residuales con respecto a la suma del cuadrado de los residuales

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{T} \left(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}$$

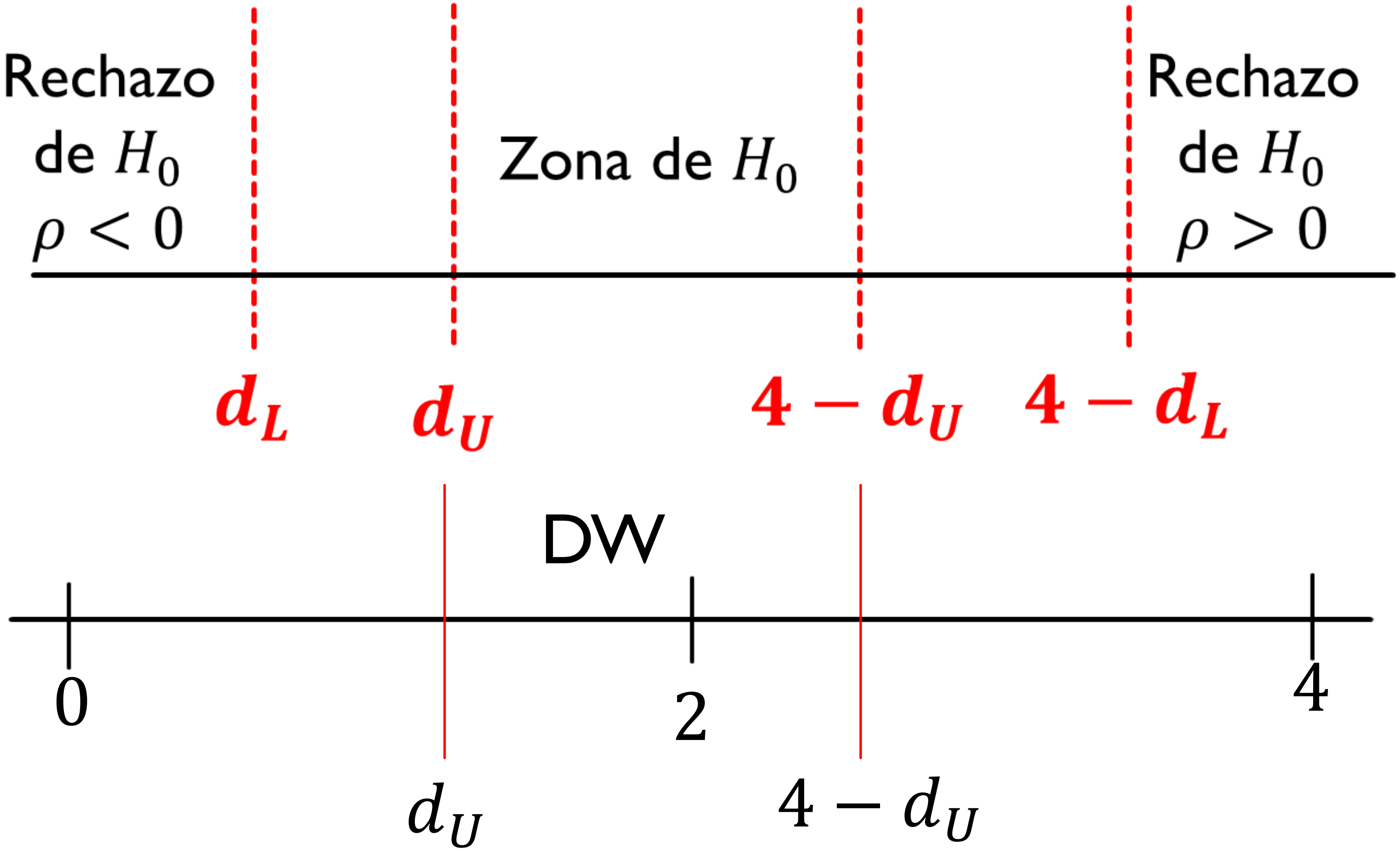
La distribución teórica del estadístico de Durbin-Watson se define como:

$$K \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{(1+\rho^2)\sum_{t=1}^{T} u_t^2 - 2\rho\sum_{t=1}^{T} u_t u_{t-1}\right\}\right]$$

De este manera se demuestra que el estadístico Durbin-Watson puede tomar valores entre cero y cuatro



Las zonas de H_0 y de la hipótesis alternativa de se definen a partir de los límites inferior y superior



Valores admisibles para DW

$$d_U < DW < 4 - d_U$$

Tabla Estadístico Durbin-Watson

Table 4. *Significance points of d_L and d_U : 5 %*

n	k′ = 1		k′ = 2		k′ = 3		k′ = 4		k′ = 5	
	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U	d_L	d_U
15	1·08	1·36	0·95	1·54	0·82	1·75	0·69	1·97	0·56	2·21
16	1·10	1·37	0·98	1·54	0·86	1·73	0·74	1·93	0·62	2·15
17	1·13	1·38	1·02	1·54	0·90	1·71	0·78	1·90	0·67	2·10
18	1·16	1·39	1·05	1·53	0·93	1·69	0·82	1·87	0·71	2·06
19	1·18	1·40	1·08	1·53	0·97	1·68	0·86	1·85	0·75	2·02
20	1·20	1·41	1·10	1·54	1·00	1·68	0·90	1·83	0·79	1·99
21	1·22	1·42	1·13	1·54	1·03	1·67	0·93	1·81	0·83	1·96
22	1·24	1·43	1·15	1·54	1·05	1·66	0·96	1·80	0·86	1·94
23	1·26	1·44	1·17	1·54	1·08	1·66	0·99	1·79	0·90	1·92
24	1·27	1·45	1·19	1·55	1·10	1·66	1·01	1·78	0·93	1·90
25	1·29	1·45	1·21	1·55	1·12	1·66	1·04	1·77	0·95	1·89
26	1·30	1·46	1·22	1·55	1·14	1·65	1·06	1·76	0·98	1·88
27	1·32	1·47	1·24	1·56	1·16	1·65	1·08	1·76	1·01	1·86
28	1·33	1·48	1·26	1·56	1·18	1·65	1·10	1·75	1·03	1·85
29	1·34	1·48	1·27	1·56	1·20	1·65	1·12	1·74	1·05	1·84
30	1·35	1·49	1·28	1·57	1·21	1·65	1·14	1·74	1·07	1·83
31	1·36	1·50	1·30	1·57	1·23	1·65	1·16	1·74	1·09	1·83
32	1·37	1·50	1·31	1·57	1·24	1·65	1·18	1·73	1·11	1·82
33	1·38	1·51	1·32	1·58	1·26	1·65	1·19	1·73	1·13	1·81
34	1·39	1·51	1·33	1·58	1·27	1·65	1·21	1·73	1·15	1·81
35	1·40	1·52	1·34	1·58	1·28	1·65	1·22	1·73	1·16	1·80
36	1·41	1·52	1·35	1·59	1·29	1·65	1·24	1·73	1·18	1·80

Para k = número de variables independientes

(du, 4-du)

Estática	K = 2 (1.57, 2.43)	T=30
Ajuste	K = 3 (1.65, 2.35)	T=29
Dinámica	K = 5 (1.84, 2.16)	T=29
Diferencia	K = 2 (1.56, 2.44)	T=29
ECM	K = 6 (1.96, 2.04)	T=28

Estadísticos DW ecuaciones

Estática	0.539620	Diferencia	0.625492
Ajuste	0.879090	ECM	2.334384
Dinámica	0.520320		

Desarrollando el estadístico Durbin-Watson

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^{T} (\hat{u}_t^2 - 2\hat{u}_t\hat{u}_{t-1} + \hat{u}_{t-1}^2)}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}}}_{\approx 1} - 2 \underbrace{\boxed{\frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_t\hat{u}_{t-1}}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}}}_{= \hat{\rho}} + \underbrace{\boxed{\frac{\sum_{t=2}^{T} \hat{u}_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^{T} \hat{u}_t^2}}}_{\approx 1}$$

$$DW = 1 - 2\rho + 1 = 2 - 2\rho = 2(1 - \rho)$$

Si el DW se ubica entre 1.5 y 2.5 se puede asumir que no existe autocorrelación

La Durbin Watson es válida solo cuando las variables incluidas en la ecuación son exógenas.

Durbin Watson pierde potencia cuando se incluyen los valores rezagados de la variable dependiente en la ecuación de regresión.

En este caso el valor del estadístico dw esta sesgado hacia 2 y puede por tanto indicar la independencia serial cuando en realidad existe un problema de autocorrelación.

Prueba de autocorrelación Breusch-Godfrey (LM-autocorrelación)

Testing Against General Autoregressive and Moving Average Error Models when the Regressors Include Lagged Dependent Variables
Author(s): L. G. Godfrey
Source: *Econometrica*, Vol. 46, No. 6 (Nov., 1978), pp. 1293-1301

Breusch, T.S. (1979) "Testing for Autocorrelation in Dynamic Linear Models", Australian Economic Papers, 17, 334–355

Multiplicadores de Lagrange

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Z_t + u_t$$

$$\hat{u}_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{u}_{t-1} + \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Z_t + e_t$$

Prueba LM(1)

$$H_0 : \alpha_1 = 0$$

$$H_1 : \alpha_1 \neq 0$$

$$\hat{u}_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{u}_{t-1} + \alpha_2 \hat{u}_{t-2} + \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 Z_t + e_t$$

Prueba LM(2)

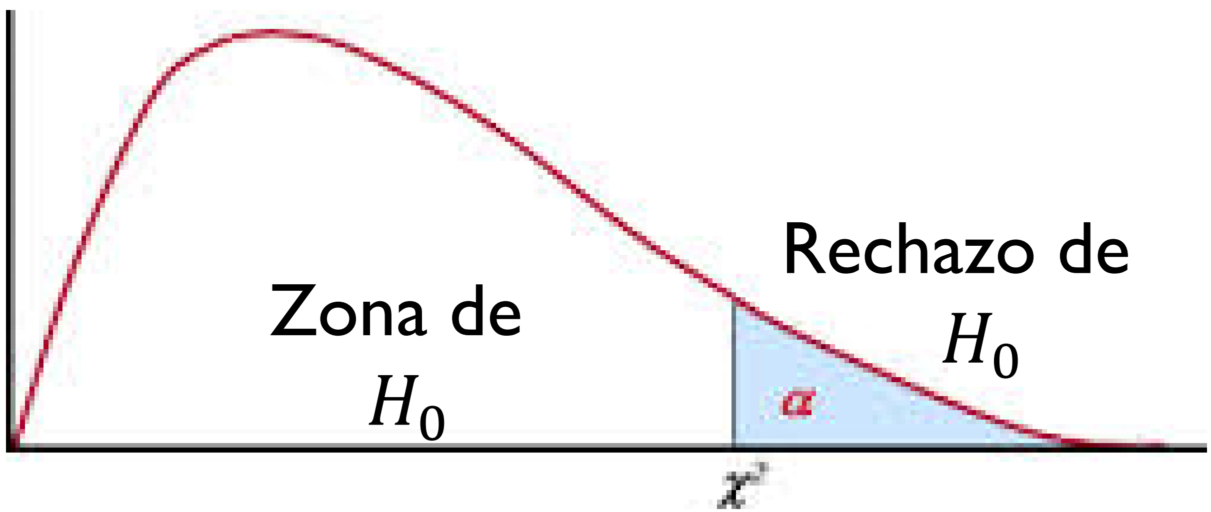
$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

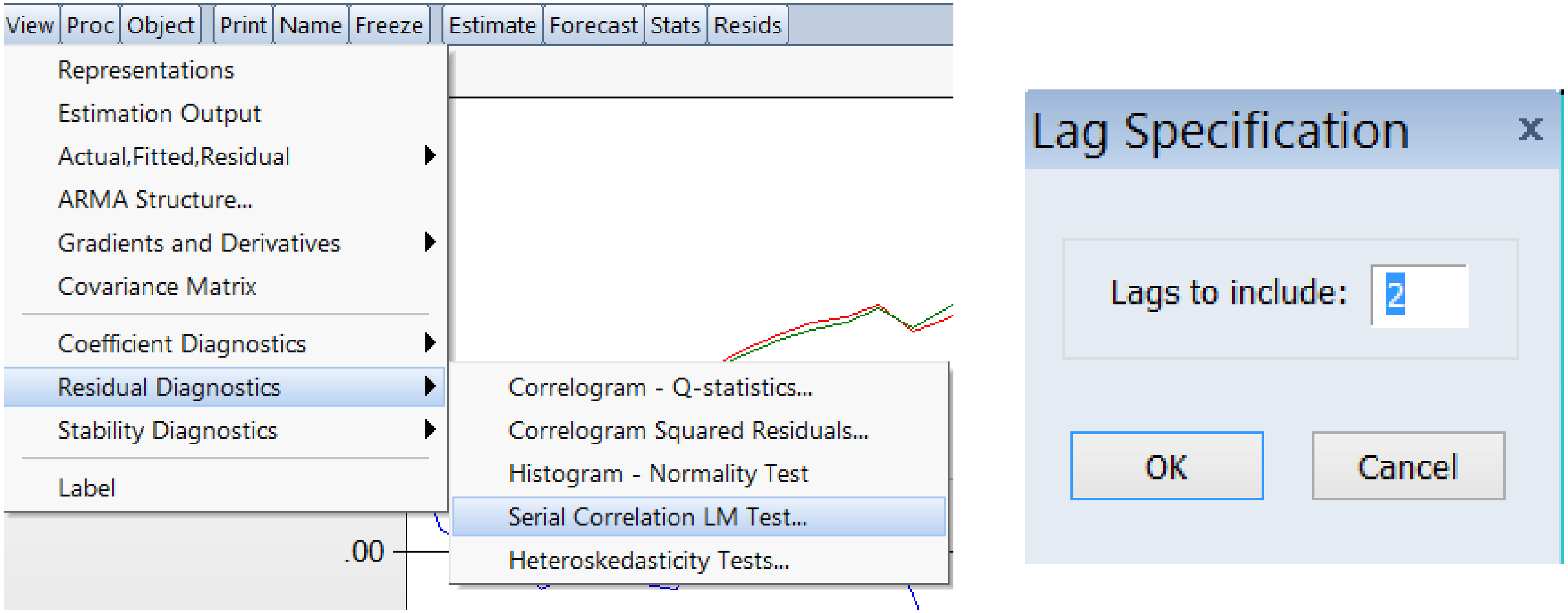
$$H_1 : \alpha_1 \neq 0, \alpha_2 \neq 0$$

Estadístico de la prueba. Se demuestra que el R^2 de la regresión auxiliar multiplicada por los grados de libertad

$$(T-p)R^2 \sim \chi^2(p)$$

Donde p es el número de restricciones en la regresión auxiliar. El estadístico se distribuye como una ji-cuadrada



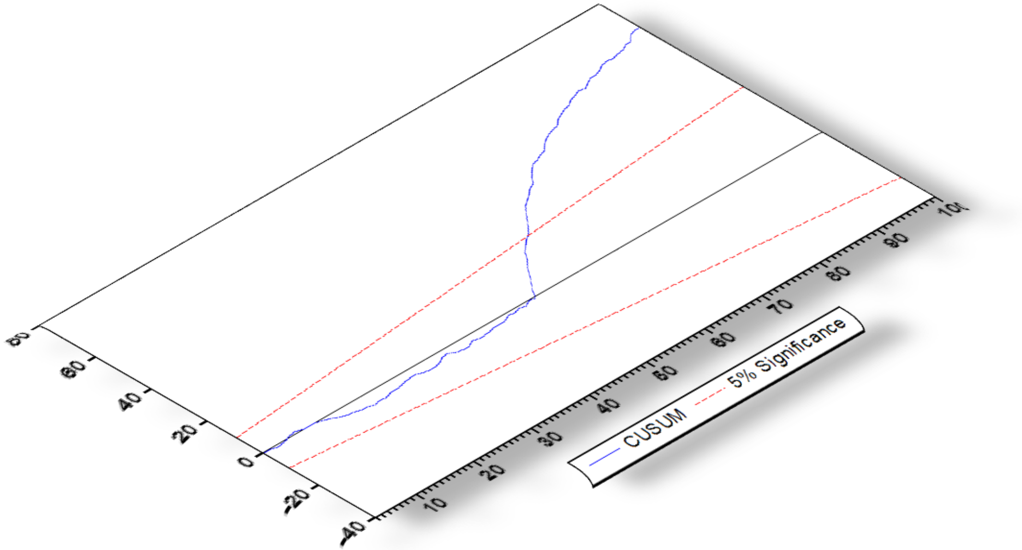


Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	13.34620	Prob. F(2,25)	0.0001
Obs*R-squared	15.49110	Prob. Chi-Square(2)	0.0004

Eviews también reporta un estadístico F, el resultado indica problemas de autocorrelación

ESTABILIDAD DE LOS PARÁMETROS



Supuesto de estabilidad de los estimadores

La especificación del modelo econométrico asume que los estimadores permanecen estables a lo largo de la muestra. No se modifica el valor de los estimadores

Modelo general $$\mathbf{Y_t} = \mathbf{X_t}\beta + \mathbf{u_t}$$

$\hat{\beta}$ El valor de los estimadores no cambia en el tiempo

Cuando el valor de los estimadores cambia se dice que el modelo presenta problemas de *Cambio Estructural*. La respuesta entre las variables cambia en el tiempo

Cambio estructural

$$\mathbf{Y_t} = \mathbf{X_t}\beta_t + \mathbf{u_t}$$

Consecuencias del cambio estructural

a) El valor de los estimadores no miden adecuadamente la relación entre las variables, la respuesta de la variable dependiente cambia en el tiempo
b) El modelo no puede ser utilizado para realizar pronóstico
c) Genera sesgo en la distribución de los errores
d) Es una causa de problemas de heteroscedasticidad

Estimación por mínimos cuadrados recursivos

Techniques for Testing the Constancy of Regression Relationships over Time
Author(s): R. L. Brown, J. Durbin, J. M. Evans
Source: *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, Vol. 37, No. 2 (1975), pp. 149-192

Es una serie de estimaciones por MCO. Donde la muestra para cada estimación se incrementa sucesivamente.

$$\mathrm{Y}_i = \mathrm{X}_i \hat{\beta}_i + \mathrm{u}_i \qquad i = m, \ldots, T$$

Prueba de Residuales Recursivos

La posible inestabilidad de los estimadores podría verificarse examinando el comportamiento de los residuos que generan las estimaciones recursivas del modelo

Su representación gráfica permite observar como el estimador cambia en el tiempo

Por estimaciones recursivas se entienden aquellas en que la ecuación se estima repetidamente, con la utilización siempre del mayor subconjunto de los datos muestrales

Prueba CUSUM

Se calculan los residuales recursivos

$$v_t = \mathrm{Y}_t - \mathrm{X}_t \hat{\beta}_{t-1}$$

Se obtiene la varianza

$$Var(v_t) = \sigma^2 \left[1 + x_t' \left(\mathrm{X}_{t-1}' \mathrm{X}_{t-1} \right)' x_t \right]$$

Se estandariza la varianza

$$\tilde{v} = \frac{v_t}{\sqrt{Var(v_t)}}$$

Para $t = k+1, \ldots, T$

Se construye la suma acumulada (CUSUM)

$$CUSUM = W_t = \sum_{j=k+1}^{T} \frac{\tilde{v}_j}{\hat{\sigma}^2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = RSS_T / (T - k)$$

Se espera que $E(W_t)=0$ pero si los parámetros no son constantes diverge del cero

Se definen un límite inferior y un límite superior para la trayectoria de la suma acumulada de los errores recursivos

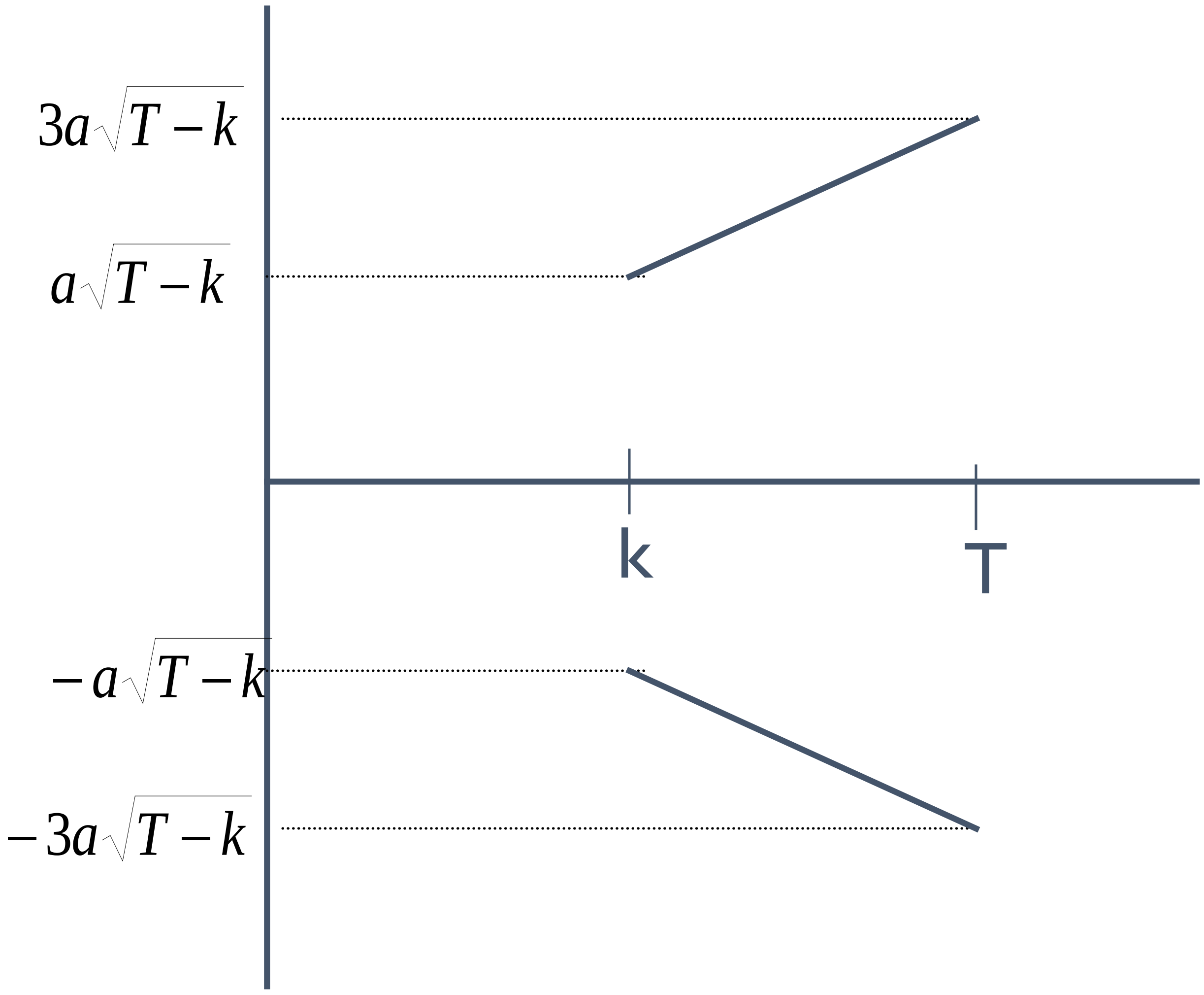
Límites de no rechazo

$$\left(k, \pm a\sqrt{T-k}\right)$$

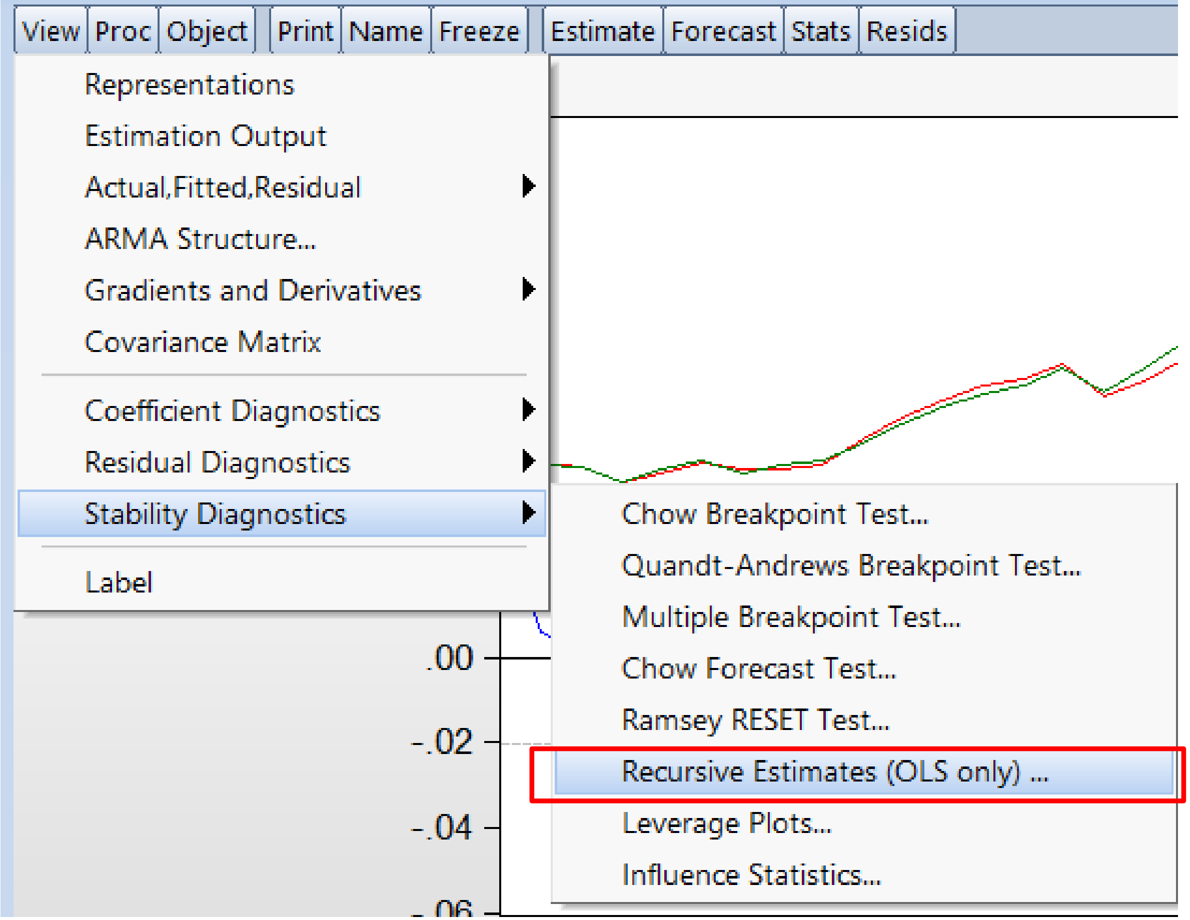
$$\left(T, \pm 3a\sqrt{T-k}\right)$$

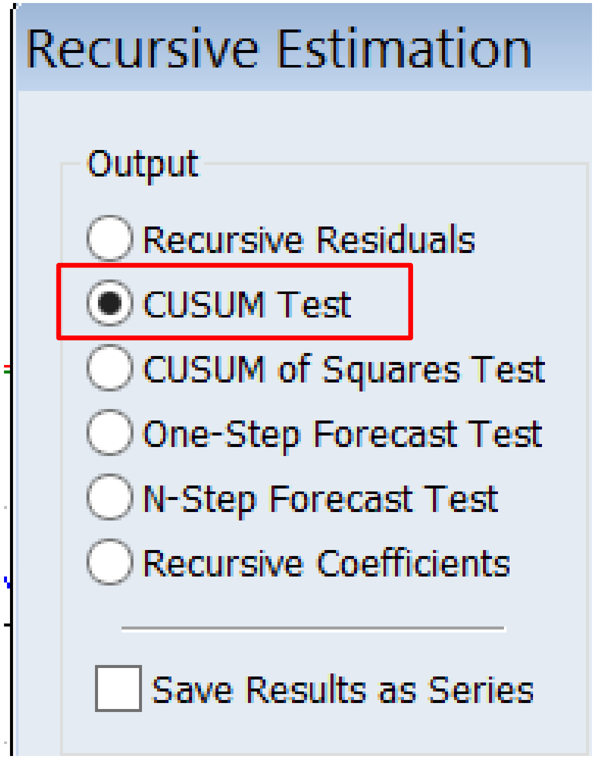
α=0.05 a= 0.948

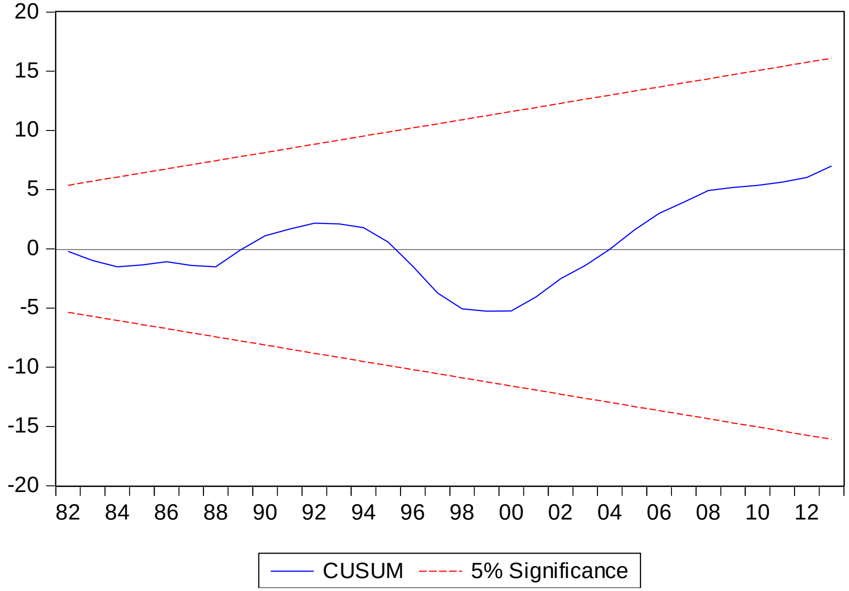
El gráfico de la suma acumulada de los residuales recursivos (CUSUM) respecto al tiempo permite verificar desviaciones sistemáticas de éstos desde su línea de cero que es el valor esperado



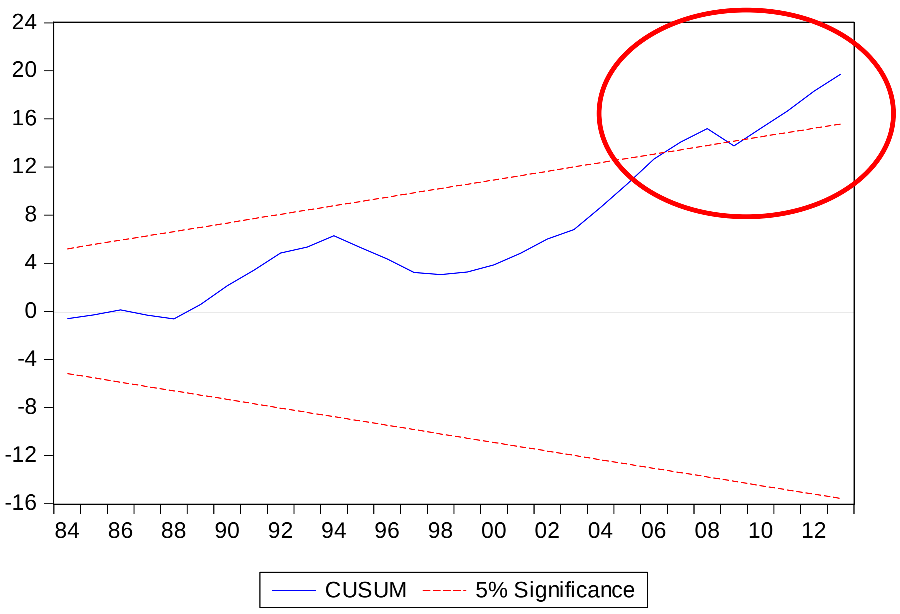
$3a\sqrt{T-k}$
$a\sqrt{T-k}$
k
T
$-a\sqrt{T-k}$
$-3a\sqrt{T-k}$


View
Proc
Object
Print
Name
Freeze
Estimate
Forecast
Stats
Resids
Representations
Estimation Output
Actual,Fitted,Residual
ARMA Structure...
Gradients and Derivatives
Covariance Matrix
Coefficient Diagnostics
Residual Diagnostics
Stability Diagnostics
Label
Chow Breakpoint Test...
Quandt-Andrews Breakpoint Test...
Multiple Breakpoint Test...
Chow Forecast Test...
Ramsey RESET Test...
Recursive Estimates (OLS only) ...
Leverage Plots...
Influence Statistics...
.00
-.02
-.04
-.06


Recursive Estimation
Output
Recursive Residuals
CUSUM Test
CUSUM of Squares Test
One-Step Forecast Test
N-Step Forecast Test
Recursive Coefficients
Save Results as Series



No hay cambio estructural, la suma acumulada esta dentro de los límites



Problemas de cambio estructural sale de las bandas

Cusum cuadrado (CUSUMSQ). Una medida alternativa, aunque no equivalente a utilizar CUSUM, consiste en emplear los cuadrados de los residuos recursivos. De nuevo, la suma acumulada en el tiempo de estos residuos al cuadrado, conocida como CUSUM al cuadrado, permite comprobar desviaciones no aleatorias desde su línea de valor medio

La serie de CUSUM al cuadrado (CUSUMSQ), debidamente estandarizada, tiene un valor esperado que va de cero en t=1 hasta uno al final de la muestra, t=T

CUSUM SQR

$$\tilde{W}_t = \frac{\sum_{j=k+1}^{t} w_j^2}{\sum_{j=k+1}^{T} w_j^2} \quad t = k+1,\dots,T$$

$$E\left[\tilde{W}_t\right] = \frac{t-k}{T-k}$$

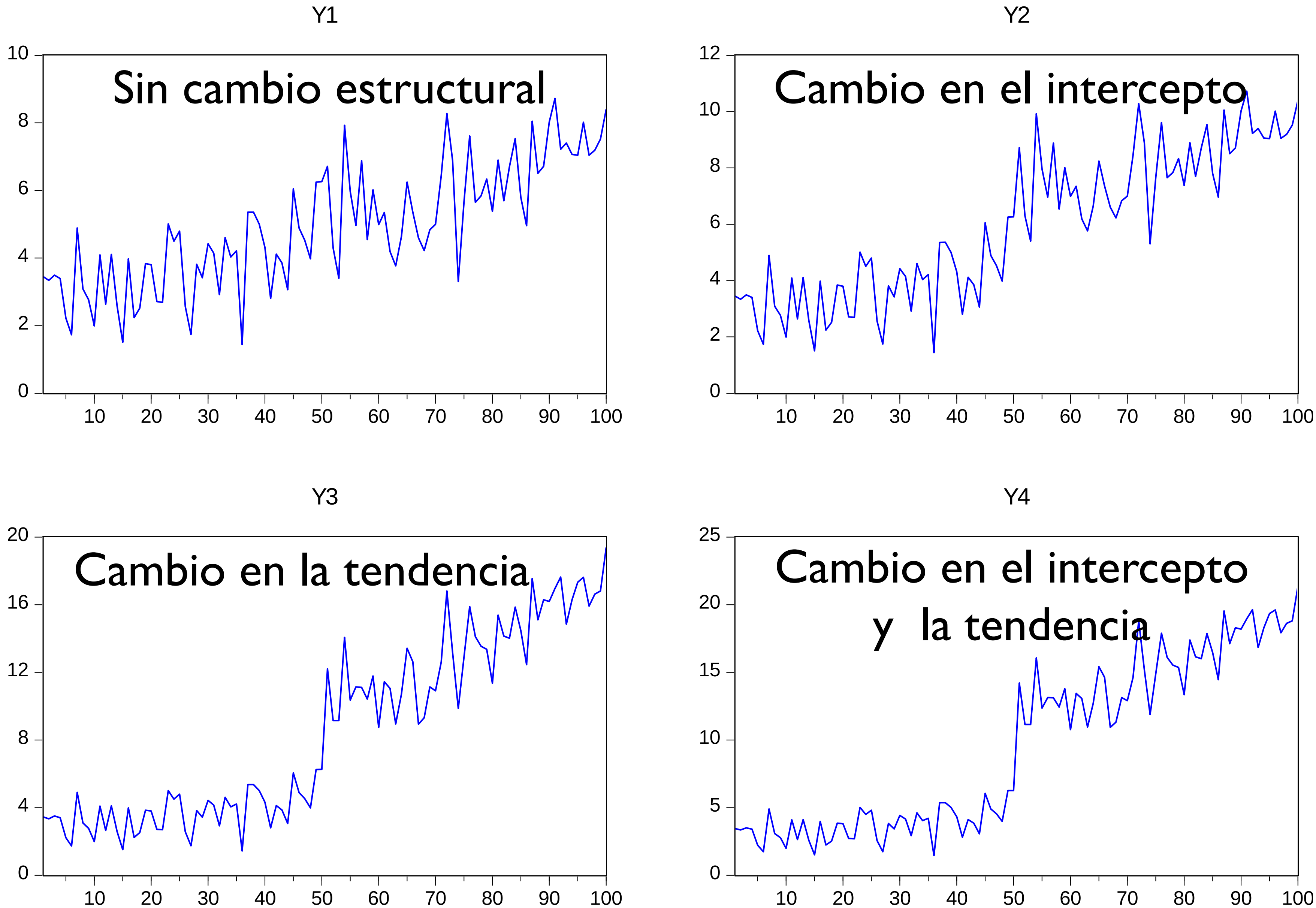
La prueba CUSUM es un indicador de la instabilidad de la media condicional del modelo, no permite identificar las fechas de cambio

La prueba CUSUMSQ esta asociado a cambios en la varianza de los errores, por lo tanto se sugiere aplicar previamente las pruebas de heteroscedasticidad

Existen otras pruebas más eficientes en la detección de problemas de cambio estructural pero requieren una muestra de datos grande

Causas que generan el problema:

1) Choques externos o medidas de política económica que han afectado la evolución de la variables
2) El problema de heteroscedasticidad y forma funcional están relacionados con el cambio estructural
3) Es necesario incorporar más información estadística en el modelo, mediante otras variables explicativas y/o rezagos de las variables del modelo


Y1
Sin cambio estructural
0
2
4
6
8
10
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
Y2
Cambio en el intercepto
0
2
4
6
8
10
12
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
Y3
Cambio en la tendencia
0
4
8
12
16
20
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100
Y4
Cambio en el intercepto
y la tendencia
0
5
10
15
20
25
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100

CURSO INTERNACIONAL: CONSTRUCCIÓN DE ESCENARIOS ECONÓMICOS Y ECONOMETRÍA AVANZADA

PRUEBAS DE DIAGNÓSTICO

Instructor: Horacio Catalán Alonso

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
SEDE BOGOTÁ
FACULTAD DE ARTES

NACIONES UNIDAS
CEPAL